Introduction

David A. Madore

17 novembre 2004

CVS : `$Id: intro.tex,v 1.6 2004/11/17 22:38:32 david Exp $`

> The White Rabbit put on his spectacles. 'Where shall I begin, please your Majesty?' he asked.
>
> 'Begin at the beginning,' the King said gravely, 'and go on till you come to the end: then stop.'
>
> —Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*

1 Motivations : petit tour d'horizon

1.1 Courbes

On pourrait toujours commencer un texte de géométrie arithmétique par le résultat suivant qui explique que pour la dimension 1 la situation est raisonnablement bien comprise :

Théorème 1.1.1. *Soit C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps de nombre k et $\bar C = C \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar k$ l'extension de C à une clôture algébrique $\bar k$ de ce dernier. Appelons g le* genre *de C (c'est-à-dire la dimension de $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ ou de $H^0(C, K_C)$). Alors*

(i) Si $g = 0$, on a $\bar C \cong \mathbb{P}^1_{\bar k}$. Dans ce cas, soit $C \cong \mathbb{P}^1_k$, soit $C(k) = \varnothing$ (auquel cas C représente une classe de 2-torsion non nulle dans le groupe de Brauer $\operatorname{Br}(k)$ de k : en fait, C peut s'écrire comme une conique dans $\mathbb{P}^2_k$). En particulier, les points k-rationnels sont denses sur C dès qu'il en existe un.

(ii) Si $g = 1$, alors $\bar{C} \cong J_{\bar{C}}$ (où $J_{\bar{C}}$ désigne la jacobienne de $\bar{C}$) et C est un espace principal homogène sous J_C. Dans ce cas, soit $C \cong J_C$, auquel cas C peut être muni d'une loi de groupe abélien pour laquelle les points k-rationnels $C(k)$ forment un sous-groupe de type fini de $C(\bar{k})$, soit $C(k) = \varnothing$ (auquel cas C représente une classe non nulle dans le groupe dit de Châtelet-Weil $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), J_C)$).

(iii) Si $g \geq 2$, alors $C(k)$ est toujours fini.

La partie (i) est élémentaire. La partie (ii) introduit la théorie des courbes elliptiques : le fait que $C(k)$ est (quand il est non vide) un groupe abélien de type fini constitue le théorème de Mordell-Weil (cf. [22], chapitre VIII). La partie (iii) est la conjecture de Mordell, devenue depuis [5] le théorème de Faltings.

Voici quelle morale (formulée bien sûr dans des termes extrêmement vagues) on pourrait tirer du théorème 1.1.1 pour servir de fil directeur à l'étude de l'arithmétique des variétés algébriques de dimension supérieure :

Slogan 1.1.2. *« La géométrie influence l'arithmétique. »*
(Plus une variété est « proche » d'être rationnelle, plus elle a de chances d'avoir « suffisamment » de points rationnels. Notamment, l'existence de courbes rationnelles géométriquement tracées sur une variété est une condition favorable pour l'existence de points rationnels.)

1.2 Dimension ≥ 2

À partir de la dimension 2, la situation n'est plus aussi bien comprise que dans le cas des courbes. Déjà la classification purement géométrique des surfaces, due à Enriques, Kodaira et d'autres (voir [21] pour une introduction au sujet ainsi qu'un énoncé précis) présente un nombre assez important de types de surfaces minimales ($\mathbb{P}^2$ et surfaces de Hirzebruch, surfaces réglées sur une courbe de genre $g > 0$, surfaces abéliennes, bi-elliptiques, K3, d'Enriques, surfaces elliptiques de dimension de Kodaira 1, et surfaces de type général). Sur un corps k non clos, une surface (projective, lisse, géométriquement connexe, et géométriquement) rationnelle est k-birationnelle à une surface fibrée en conique au-dessus d'une conique ou bien à une surface de del Pezzo de degré $1 \leq d \leq 9$ (c'est-à-dire une surface qui, sur $\bar{k}$, est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou à l'éclaté du plan projectif en $9 - d$ points) : voir [12], III.2–3 (et notamment III.2.2) pour des énoncés précis.

En dimension 3 ou plus, la situation est encore moins bien comprise, et une classification complète semble hors de protée. L'approche purement géométrique est proposée par le « programme de Mori » (cf. [13] pour une introduction extrêmement claire à la théorie de Mori), qui donne des résultats assez satisfaisants en dimension 3. Il est cependant tentant de distinguer trois types « purs », exclusifs mais non exhaustifs, qui généralisent les cas (i), (ii) et (iii) du théorème 1.1.1 pour le cas des courbes :

(i) Les variétés rationnellement connexes (voir la définition 2.1.1 ci-dessous).

(ii) Les (torseurs sous les) variétés abéliennes.

(iii) Les variétés de type général (voir la définition 1.2.2 ci-dessous).

En vertu du slogan 1.1.2 énoncé plus haut, les points rationnels devraient être plus communs dans le cas (i) que dans les cas (ii) et (iii). Concernant le cas (iii), conjecturalement, les points rationnels ne peuvent pas être denses sur un corps de nombres ; précisément :

Définition 1.2.1. *Soit X une variété projective (sur un corps algébriquement clos). On appelle* lieu spécial *de X l'adhérence de Zariski des images des morphismes non constants depuis $\mathbb{P}^1$ ou une variété abélienne vers X.*

Définition 1.2.2. *Une variété projective lisse connexe X (sur un corps algébriquement clos) est dite* de type général *lorsque le fibré canonique ω_X est « grand » (ou « pseudo-ample »), c'est-à-dire que pour $\ell \gg 0$ l'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \omega_X^{\otimes \ell}))$ est birationnelle sur son image.*

Conjecture 1.2.3 (Bombieri, Lang). *Une variété projective lisse connexe X est de type général si et seulement si son lieu spécial n'est pas X tout entier. De plus, dans ces conditions, si X est définie sur un corps de nombres k, alors $X(k)$ ne contient qu'un nombre fini de points en-dehors du lieu spécial.*

(Voir [18], notamment chapitre I, pour plus de précisions sur ces conjectures et sur les rares résultats connus.)

Des variétés de type général, Swinnerton-Dyer a dit : « It is a moral judgement of geometers that you would be wise to stay away from the bloody things. » L'auteur de cette thèse suivra donc ce sage conseil et s'en tiendra, aussi loin que possible des variétés de type général, aux variétés rationnellement connexes, que nous présentons maintenant.

2 Variétés rationnellement connexes : un aperçu géométrique

2.1 Quelques propriétés

Définition 2.1.1. *Une variété projective lisse X sur un corps algébriquement clos indénombrable de caractéristique zéro est dite* rationnellement connexe *lorsque pour tous points $x, y \in X$ il existe un morphisme $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ tel que $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$.*

Ceci signifie que les courbes rationnelles tracées sur X sont au moins suffisantes pour relier deux points quelconques. En fait, il suffit de demander cette propriété pour x et y deux points très généraux (c'est-à-dire situés en-dehors d'une réunion dénombrable de fermés propres de X), et on peut relier alors un nombre quelconque de points de X par une courbe rationnelle, même prescrire arbitrairement le développement de Taylor, à un ordre arbitrairement élevé, de la courbe en un point quelconque : voir [14] (4.1.2.4) pour un énoncé précis et une preuve (voir aussi [12], IV.3.9, et [2], exercice 4.8.6). Ceci a des conséquences géométriques telles que résumées par :

Théorème 2.1.2. *Soit X une variété projective lisse rationnellement connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Alors :*

- *Pour tous entiers $m, p > 0$ on a $H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes m}) = 0$. Notamment, $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$.*
- *Tout revêtement étale fini connexe de X est trivial : X est simplement connexe au sens algébrique ; si $k = \mathbb{C}$, alors X est même simplement connexe au sens analytique.*
- *Tout 1-cycle sur X est rationnellement équivalent à une combinaison de courbes rationnelles.*

Voir [2], corollaire 4.18, ainsi que [12], IV.3.8 et IV.3.13.2, pour des démonstrations de ces faits.

Pour trouver des exemples de variétés rationnellement connexes, on a au moins les variétés rationnelles (c'est-à-dire birationnellement équivalentes, toujours sur le corps algébriquement clos, à un espace projectif) ou même simplement unirationnelles (c'est-à-dire dominées par un espace projectif). On a aussi le résultat suivant :

Théorème 2.1.3 (Campana, Kollár, Miyaoka, Mori). *Soit X une variété de Fano (c'est-à-dire que le fibré anticanonique, $\omega_X^{\otimes -1}$, est ample), lisse,* *sur un corps (algébriquement clos) de caractéristique zéro. Alors X est rationnellement connexe.*

Voir [2], proposition 5.16, ou bien [12], V.2.13, pour une démonstration de ce fait.

En particulier, si X est une intersection complète lisse dans $\mathbb{P}^n$ d'hypersurfaces de degrés $d_1, \ldots, d_s$, vérifiant $d_1 + \cdots + d_s \leq n$, dont on vérifie facilement qu'elle est de Fano (car $\omega_X^{\otimes -1} \cong \mathcal{O}(n+1-\sum_i d_i)$, alors X est rationnellement connexe. C'est le cas, par exemple, d'une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 3$, ou bien d'une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 4$.

2.2 Courbes très libres

Sur une variété projective lisse rationnellement connexe, une grande importance est jouée par les courbes rationnelles dites *très libres* :

Définition 2.2.1. *Soit X une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos k. On dit que $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ est* libre *(resp.* très libre*) lorsque le fibré f^*T_X (image réciproque du fibré tangent à X) est nef (resp. ample).*

(De façon générale, on dit qu'un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur une variété projective lisse Z est nef, resp. ample, lorsque $\mathcal{O}(1)$ est nef, resp. ample, sur $\mathbb{P}(\mathscr{E})$: cf. [10], II.7 ; mais lorsque Z est $\mathbb{P}^1$, la caractéristation est facile car tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{P}^1$ s'écrit $\bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ pour un certain nombre (fini) d'entiers a_i (cf. [10], V, exercice 2.6 et [12], II.3.8 et II.3.8.5), et $\mathscr{E}$ est nef, resp. ample, si et seulement si tous les a_i sont positifs, resp. strictement positifs.)

La définition d'une courbe $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ libre (resp. très libre) peut donc encore s'écrire $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_X)(-1)) = 0$ (resp. $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_X)(-2)) = 0$).

L'intérêt des courbes rationnelles libres ou très libres est qu'on peut les déformer (en gardant un point fixe, dans le cas des courbes très libres) : cette affirmation est rendue précise par la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. *Soit X une variété projective et lisse sur un corps k algébriquement clos, et x_0 un point de X. On appelle $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0)$ le schéma (localement de type fini) paramétrant les morphismes de $\mathbb{P}^1$ vers X envoyant 0 sur x_0 (autrement dit, le schéma représentant le foncteur qui envoie un k-schéma S sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1_S, X \times_{\mathrm{Spec}\, k} S; 0 \mapsto x_0)$: voir [12], théorème I.1.10, ou [7], 4c pour la représentabilité de ce foncteur) et*

ev: $\mathbb{P}^1 \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0) \to X$ *le morphisme d'évaluation (qui envoie un* t *de* $\mathbb{P}^1_k$ *et la classe* $[f]$ *d'un morphisme* $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ *sur le point* $f(t)$ *de* X*).*
Alors l'espace tangent à $\operatorname{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0)$ *en un point* $[f]$ *s'identifie à* $H^0(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_X)(-1))$. *De plus, on a l'équivalence entre :*
- f *est très libre (soit* $H^1(\mathbb{P}^1_k, (f^*T_X)(-2)) = 0$*).*
- ev: $\mathbb{P}^1 \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0) \to X$ *est lisse en* $(t, [f])$*, où* $t \neq 0$ *est arbitraire.*

(Pour la démonstration, voir [2], propositions 4.8 et 4.9. On peut par ailleurs formuler un résultat tout à fait analogue pour des courbes libres, sans fixer le point 0 dans les morphismes.)

La simple existence d'une courbe rationnelle très libre tracée sur une variété suffit à garantir la rationnelle connexité de celle-ci. Plus précisément :

Proposition 2.2.3. *Soit* X *une variété projective lisse connexe (sur un corps* k *algébriquement clos). S'il existe* $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ *très libre, alors* X *est rationnellement connexe. Réciproquement si* X *est une variété projective lisse rationnellement connexe sur un corps* k *algébriquement clos de caractéristique* 0 *(ou* séparablement *rationnellement connexe sans hypothèse sur la caractéristique, cf. la section 2.3), tout ensemble fini de points de* X *peut être relié par une courbe très libre.*

Cf. [2], corollaire 4.17, ou [12], théorèmes IV.3.7 et IV.3.9, pour une démonstration.

2.3 Désagréments en caractéristique positive

Au moins pour des variétés projectives et lisses, la notion de rationnelle connexité introduite en 2.1.1, se comporte de façon satisfaisante. Il n'en va pas de même en caractéristique positive : on doit distinguer au moins les notions de variété rationnellement connexe, rationnellement connexe par chaînes, ou séparablement rationnellement connexe. Voici une façon de les définir :

Définition 2.3.1. *Soit* X *une variété projective lisse connexe sur un corps algébriquement clos indénombrable* k*. On dit que* X *est :*
- *rationnellement connexe lorsque deux points très généraux de* X *(c'est-à-dire en-dehors d'une réunion dénombrable de fermés propres) peuvent être reliés par une courbe rationnelle tracée sur* X*,*

- *rationnellement connexe par chaînes lorsque deux points très généraux de X peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles tracées sur X,*
- *séparablement rationnellement connexe (« s.r.c. » en abrégé) lorsqu'il existe une courbe rationnelle très libre tracée sur X.*

Si k n'est pas indénombrable, on dira que X vérifie ces propriétés lorsqu'elle les vérifie après passage à un corps algébriquement clos indénombrable (quelconque) contenant k.

On peut aussi tenter de définir les notions en question sur des variétés non nécessairement lisses (par exemple, un cône sur une courbe elliptique fournirait un bon exemple de variété rationnellement connexe par chaînes mais non rationnellement connexe) ou éventuellement ouvertes ; nous ne le ferons pas.

Il semble que la propriété d'être séparablement rationnellement connexe se comporte de la façon la plus agréable en caractéristique positive (entre autres, une déformation d'une variété s.r.c. est elle-même s.r.c., et une spécialisation d'une variété s.r.c. est rationnellement connexe par chaînes ; par ailleurs, la propriété de séparable rationnelle connexité permet de faire passer une courbe rationnelle par un nombre quelconque de points d'une variété lisse). Malheureusement, il n'est pas vrai que les variétés de Fano, même lisses, soient toujours séparablement rationnellement connexes en caractéristique positive (voir [12], théorème IV.5.11) : on sait seulement qu'elles sont rationnellement connexes par chaînes. Il est permis de penser que les hypersurfaces (et, plus généralement, les intersections complètes) de Fano, c'est-à-dire de degré d dans $\mathbb{P}^n$ avec $d \leq n$, sont séparablement rationnellement connexes, mais ce problème est encore ouvert (en caractéristique positive).

3 Arithmétique des variétés rationnellement connexes : quelques résultats (et beaucoup de questions)

3.1 Généralités et définitions

Le principe général (cf. le slogan 1.1.2 énoncé plus haut, et aussi [12], IV.6.3.1), énoncé dans des termes aussi vagues que possible, est que si X est une variété projective lisse (géométriquement) rationnellement connexe sur un corps k « assez gros », X devrait avoir « suffisamment » de points k-rationnels ; de plus, il devrait y avoir suffisamment de courbes rationnelles définies sur k tracées sur X pour relier les points k-rationnels. Essayons d'énoncer quelques résultats, soit prouvés soit conjecturaux, qui rendent précises ces idées.

On aura besoin de la notion de R-équivalence :

Définition 3.1.1. *Soit X une variété projective définie sur un corps k. On dit que deux points $x, y \in X(k)$ sont* directement R-équivalents *s'il existe $f\colon \mathbb{P}^1_k \to X$ (soulignons : défini sur k) tel que $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$. La clôture transitive de cette relation définit une relation d'équivalence sur $X(k)$ appelée la R-équivalence : on note $X(k)/R$ l'ensemble des classes d'équivalence, et on dit que deux points sont R-équivalents quand ils sont dans la même classe. Si $X(k)/R$ est réduit à un singleton, on dit que X est R-triviale (sur k).*

Rappelons par ailleurs qu'un *zéro-cycle* sur X désigne une combinaison linéaire formelle $\sum_i n_i x_i$ de points fermés de X, le degré du zéro-cycle étant alors $\sum_i n_i \deg_k(x_i)$. Les zéro-cycles *rationnellement équivalents* à zéro sont ceux engendrés par les diviseurs de fonctions sur les courbes tracées sur X (qu'il faut définir soigneusement si la courbe est singulière : cf. [6], chapitre 1 et notamment §1.3 et §1.6, pour les détails). La notion d'équivalence rationnelle entre deux points (c'est-à-dire le fait que leur différence soit rationnellement équivalente à zéro) est manifestement plus grossière que celle de R-équivalence.

3.2 Corps C_1

Définition 3.2.1. *On dit qu'un corps k vérifie la propriété C_1 de Lang (ou, en bref : est un corps C_1) lorsque toute hypersurface H de degré $\leq n$ dans $\mathbb{P}^n$ possède un k-point. Plus généralement, on définit la propriété C_r (pour $r \geq 0$) lorsque toute hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^n$ possède un k point si $d^r \leq n$. (Ainsi, les corps C_0 sont précisément les corps algébriquement clos ; un corps C_1 est parfois dit quasi-algébriquement clos.)*

Les exemples de corps C_1 les plus évidents sont les corps finis d'après un théorème de Chevalley, et les corps $\mathbb{C}(t)$ (ou plus généralement le corps d'une fonction d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos) et $\mathbb{C}((t))$ d'après des théorèmes bien connus de Tsen et Lang. Le corps $\mathbb{F}_q((t))$ des séries de Laurent sur un corps fini fournit un exemple de corps C_2 (en revanche, les corps p-adiques ne sont pas C_2 d'après des contre-exemples de Terjanian). On peut par ailleurs signaler que, sous une certaine hypothèse technique dont on ignore si elle est vraiment nécessaire, une intersection d'hypersurfaces de degrés $d_1, \ldots, d_s$ dans $\mathbb{P}^n$ possède un point sur un corps C_r lorsque $\sum_i d_i^r \leq n$; en particulier, pour $r = 1$, sous l'hypothèse technique que soit le corps admet des extensions de n'importe quel degré fini soit tous les d_i sont égaux entre eux, une intersection complète de Fano admet un point sur un corps C_1.

On peut alors formuler la :

Conjecture 3.2.2. *Soit X une variété projective lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe sur un corps k vérifiant la propriété C_1. Alors $X(k) \neq \varnothing$, et X est R-triviale sur k (i.e., $X(k)/R$ est réduit à un singleton).*

Comme nous l'avons dit, il est vraisemblable (et il est vrai en caractéristique zéro) que les intersections complètes lisses de Fano soient séparablement rationnellement connexes : ceci fait donc le lien avec la définition d'un corps C_1.

Certaines parties de cette conjecture sont prouvées :

Théorème 3.2.3 (de Jong, Graber, Harris, Starr). *Soit X une variété projective lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe sur le corps de fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos. Alors X a un point sur ce corps.*

La démonstration de ce théorème, par des techniques de déformation, fait l'objet des articles [9] en caractéristique nulle et [3] en toute caractéristique. Géométriquement, il signifie qu'une fibration sur une courbe (sur un corps algébriquement clos), dont la fibre générale est séparablement rationnellement connexe, a un point.

Théorème 3.2.4 (Esnault). *Soit X une variété projective lisse sur un corps fini k, telle que X soit (géométriquement) rationnellement connexe par chaînes, ou, plus généralement, que $\mathrm{CH}_0(X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \overline{k(X)}) = \mathbb{Z}$ (groupe de Chow des zéro-cycles modulo équivalence rationnelle, calculé sur la clôture algébrique de $k(X)$). Alors X a un point sur k.*

Ce résultat a été obtenu par des méthodes de cohomologie rigide ([4]).

Concernant la deuxième partie de la conjecture, on a notamment :

Théorème 3.2.5 (Kollár, Szabó). *Il existe une fonction* $\Psi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *telle que, si* X *est une variété projective lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe sur un corps fini* k*, alors*

- $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ *(où* CH_0^0 *désigne le groupe des zéro-cycles de degré zéro, modulo équivalence rationnelle), et*
- *si* $\operatorname{card} k > \Psi(\deg X, \dim X)$*, alors* X *est* R*-triviale sur* k*.*

Voir [16] pour la démonstration, qui, en fait, procède en montrant la R-trivialité de toute variété projective lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe X sur un corps k parfait et pseudo-algébriquement clos (c'est-à-dire, sur lequel toute variété géométriquement intègre a un point) ; la première partie (sur les zéro-cycles) était déjà connue par des méthodes de K-théorie ([11]). Le cas des surfaces cubiques est connu depuis [23], sans restriction sur la cardinalité du corps :

Théorème 3.2.6 (Swinnerton-Dyer). *Soit* X *une surface cubique lisse sur* k *un corps fini. Alors* X *est* R*-triviale sur* k*.*

Le cas des hypersurfaces peut certainement s'obtenir par les mêmes méthodes, en prenant soigneusement une section plane par deux points, mais il ne semble pas avoir été écrit.

3.3 Corps locaux

Un *corps local* désigne les réels ou les complexes, ou un corps p-adique (une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) ou encore le corps $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$ des séries de Laurent sur un corps fini. Un tel corps possède une topologie « transcendante » pour laquelle il est localement compact. Le principal résultat sur la R-équivalence sur un tel corps est apporté par [15] :

Théorème 3.3.1 (Kollár). *Soit* X *une variété projective lisse séparablement rationnellement connexe sur* K *un corps local. Alors :*

- *Par tout point* $x \in X(K)$ *il existe une courbe rationnelle très libre définie sur* K *(i.e., un* $f\colon \mathbb{P}^1_K \to X$ *tel que* $f(0) = x$ *et* f^*T_X *ample).*
- *Toute classe de* R*-équivalence (dans* $X(K)$*) est ouverte et fermée (pour la topologie transcendante).*
- *L'ensemble* $X(K)/R$ *de ces classes est fini.*

De plus, si $K = \mathbb{R}$, alors $X(\mathbb{R})/R$ est précisément l'ensemble des composantes connexes de $X(\mathbb{R})$. Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$ fini, alors on a le résultat suivant, dans la continuation du théorème 3.2.5, et prouvé au même endroit ([16] ; voir aussi [17]) :

Théorème 3.3.2 (Kollár, Szabó). *Il existe une fonction $\Psi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que, si X est une variété projective lisse sur K corps local de corps résiduel k, ayant bonne réduction comme variété lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe $\tilde{X}$ sur k, alors :*
- $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ *(où CH_0^0 désigne le groupe des zéro-cycles de degré zéro, modulo équivalence rationnelle), et*
- *si* $\operatorname{card} k > \Psi(\deg X, \dim X)$*, alors X est R-triviale sur K.*

Il est prouvé plus précisément dans [17] que la flèche de spécialisation $\mathrm{CH}_0^0(X) \to \mathrm{CH}_0^0(\tilde{X})$, respectivement $X(K)/R \to \tilde{X}(k)$, est un isomorphisme de groupes, respectivement une bijection d'ensembles, dès qu'on a, sur un anneau de valuation discrète hensélien de corps des fractions K et corps résiduel k, un schéma propre lisse connexe où la fibre générique est X et dont la fibre spéciale $\tilde{X}$ est supposée séparablement rationnellement connexe. En particulier, toute fonction Ψ qui convient pour le théorème 3.2.5 convient encore ici, et on peut ici aussi conjecturer que cette hypothèse n'est pas réellement nécessaire.

Dans le cas où X a mauvaise réduction, on sait que $X(K)/R$ et CH_0^0 ne sont pas forcément triviaux : l'exemple classique est celui de la surface cubique définie par l'équation $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + pX_3^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ avec $p \geq 5$, sur laquelle deux points $\mathbb{Q}_p$-rationnels $(1 : -1 : 0 : 0)$ et $(\sqrt[3]{2} : -1 : -1 : 0)$ ne sont pas R-équivalents ni même, en fait, rationnellement équivalents. On sait que $X(K)/R$ est fini (théorème 3.3.1 plus haut) mais on ne sait pas prouver la

Conjecture 3.3.3. *Soit X une variété projective lisse séparablement rationnellement connexe sur K un corps local. Alors $\mathrm{CH}_0^0(X)$ est fini.*

Cette affirmation est cependant démontrer dans le cas des surfaces par des méthodes de K-théorie : il s'agit d'un résultat de Colliot-Thélène ([1]).

3.4 Groupe de Brauer et obstruction de Brauer-Manin

On définit le groupe de Brauer (sous-entendu : cohomologique) $\mathrm{Br}(X)$ d'un schéma X comme son second groupe de cohomologie étale $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$

à valeurs dans le groupe multiplicatif. On renvoie à [8] et [20] pour une présentation générale du groupe de Brauer. Il nous sera utile de remarquer que le groupe de Brauer d'une variété (intègre) X sur un corps k est un invariant k-birationnel : il peut se définir comme le sous-groupe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k(X))$ du corps des fonctions de X formé des classes qui ne sont nulle part ramifiées ; par ailleurs, bien entendu, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ du corps de base s'envoie vers $\mathrm{Br}\,X$ par une flèche qui est injective dès que $X(k) \neq \varnothing$.

Si X est une variété sur un corps k, et $A \in \mathrm{Br}(X)$, alors on peut évaluer A en tout point $x \in X(k)$ pour obtenir un $A(x) \in \mathrm{Br}(k)$. Cet accouplement est, de plus, compatible à la R-équivalence (c'est l'« invariance homotopique du groupe de Brauer ») : si x et y sont R-équivalents, alors $A(x) = A(y)$. On définira :

Définition 3.4.1. *Soit X une variété sur un corps k, et $x, y \in X(k)$: on dit que x et y sont* équivalents au sens de Brauer *lorsque pour tout $A \in \mathrm{Br}(X)$ on a $A(x) = A(y)$.*

Le groupe de Brauer peut donc fournir une obstruction cohomologique évidente au fait que deux points soient R-équivalents.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène, « Hilbert's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces », *Invent. Math.* **71** (1983) 1–20.

[2] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*, Springer, Universitext.

[3] A. J. de Jong & J. Starr, « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », *Amer. J. Math.* **125** (2003) 567–580.

[4] H. Esnault, « Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point », *Invent. Math.* **151** (2003) 187–191.

[5] G. Faltings, « Endlichkeitssätze für Abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (1983) 349–366.

[6] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).

[7] A. Grothendieck, « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert », séminaire Bourbaki, 13^{e} année, 1960–1961, n^{o}221.

[8] A. Grothendieck, « Le groupe de Brauer I–III », *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland (1968).

[9] T. Graber, J. Harris & J. Starr, « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 57–67.

[10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52.

[11] K. Kato & S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, *Ann. of Math (2)* **118** (1983) 241–275.

[12] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[13] J. Kollár, « The Structure of Algebraic Threefolds : an Introduction to Mori's Program », *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **17** (1987), 211–273.

[14] J. Kollár, « Low degree polynomial equations : arithmetic, geometry and topology », preprint, disponible sur `www.arxiv.org` comme `alg-geom/9607016`.

[15] J. Kollár, « Rationally connected varieties over local fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999) 357–367.

[16] J. Kollár & E. Szabó, « Rationally connected varieties over finite fields », *Duke Math. J.* **120** (2003) 251–267.

[17] J. Kollár, « Specialization of zero-cycles », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004) 689–708.

[18] S. Lang (ed.), *Number Theory III : Diophantine Geometry*, Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **60**.

[19] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[20] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press.

[21] C. Peters, *An Introduction to Complex Algebraic Geometry, with Emphasis on the Theory of Surfaces*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peters/surface.f/surfcourse.pdf`.

[22] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, Graduate Texts in Mathematics **106**.

[23] H. P. F. Swinnerton-Dyer, « Universal Equivalence for Cubic Surfaces over Finite and Local Fields », *Istituto Nazionale di Alta Mathematica Francesco Severi, Symposia Mathematica*, **24** (1981) 111-143.