Dans ce qui suit, θ étant un réel quelconque, on désignera par $\lfloor\theta\rfloor$ la partie entière de θ, c'est-à-dire le plus grand entier n tel que $n \leq \theta$. On désignera par $\flat\theta$ la partie fractionnaire de θ, soit $\flat\theta = \theta - \lfloor\theta\rfloor$, et par $\|\theta\|$ la distance de θ au plus proche entier : $\|\theta\| = \min(\flat\theta, 1 - \flat\theta)$.

Définition. *On appelle degré d'irrationnalité* $\deg\theta$ *de* $\theta \in \mathbb{R}$ *la borne inférieure de l'ensemble des réels* $d > 0$ *tels qu'il existe un* $A > 0$ *pour lequel* $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$ *implique* $\frac{p}{q} = \theta$ *pour tout entier* p *et tout naturel* q *non nul.*

Remarque : si on désigne par $\mathcal{P}(d)$ la propriété "il existe un $A > 0$ pour lequel $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$ implique $\frac{p}{q} = \theta$ pour tout entier p et tout naturel q non nul", alors $\mathcal{P}(d)$ et $d' > d$ impliquent $\mathcal{P}(d')$ (i.e. $\mathcal{P}$ est monotone croissante). Par conséquent, si $\neg\mathcal{P}(d)$ alors $\deg\theta \geq d$. Et clairement, si $\mathcal{P}(d)$ alors $\deg\theta \leq d$. On peut traduire $\mathcal{P}(d)$ par "θ est mal approché par les rationnels (différents de θ) à l'ordre d". Il est à noter qu'il est possible que l'on ait $\neg\mathcal{P}(d)$ pour tout $d > 0$, auquel cas $\deg\theta = +\infty$ (on dit alors que θ est un nombre de Liouville). En revanche, $\mathcal{P}(0)$ n'étant jamais vrai, on a toujours $\deg\theta \geq 0$, et on va faire bien mieux...

Proposition. *Si* θ *est rationnel,* $\deg\theta = 1$.

Démonstration : Soit $\theta = \frac{u}{v}$. On a alors $\theta - \frac{p}{q} = \frac{uq-vp}{vq}$. $uq - vp$ étant entier, si $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$ avec $d \geq 1$ et $A = \frac{1}{v}$, alors $\frac{p}{q} = \theta$. Donc $\deg\theta \geq 1$.

D'autre part, pour tout $A > 0$ et $d < 1$, si v est suffisamment grand, on a $|\frac{u}{v} - \frac{u+1}{v}| = \frac{1}{v} < \frac{A}{v^d}$. Et pourtant, $\frac{u+1}{v} \neq \theta$. Par conséquent, $\deg\theta \geq 1$. Donc $\deg\theta = 1$.

Proposition. *Quel que soit le réel* θ*,* $\deg\theta$ *est la borne inférieure de l'ensemble des réels* $d > 0$ *tels que l'équation*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^d}$$

ait un nombre fini de solutions en p *entier et* q *naturel non nul.*

Démonstration : Si l'équation $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^d}$ n'a qu'un nombre fini de solutions, soit A la plus petite valeur non nulle de $q^d|\theta - \frac{p}{q}|$ pour (p, q) décrivant les solutions, et $A = 1$ s'il n'y a en fait pas de solution ou que la seule solution est $\frac{p}{q} = \theta$. Alors $q^d|\theta - \frac{p}{q}| \geq A$ pour tout entier p et naturel q non nul tels que $\frac{p}{q} \neq \theta$. Donc : si $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$, alors $\frac{p}{q} = \theta$. Donc $\deg\theta \leq d$.

Si l'équation $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^d}$ a un nombre infini de solutions, alors elle a des solutions avec q arbitrairement grand (car pour un q donné elle n'a évidemment qu'un nombre fini de solutions). Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, l'équation $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^{d-\varepsilon}}$ a des solutions (car pour q suffisamment grand, $Aq^\varepsilon \geq 1$), et pour q assez grand, $\frac{p}{q} \neq \theta$. Donc $\deg\theta \geq d - \varepsilon$. Le choix de ε étant arbitraire, $\deg\theta \geq d$.

Remarque : de même que pour la définition, la propriété $\mathcal{Q}(d)$: "il existe un nombre fini de solutions rationnelles à l'équation..." est monotone croissante. Si $\mathcal{Q}(d)$, alors $\deg\theta \leq d$, et si $\neg\mathcal{Q}(d)$ alors $\deg\theta \geq d$. Et évidemment, le 1 dans cette propriété peut être remplacé par tout réel strictement positif : on n'obtient pas nécessairement une proposition $\mathcal{Q}'$ équivalente, mais pour $d \neq \deg\theta$, les propositions $\mathcal{P}(d)$, $\mathcal{Q}(d)$ et $\mathcal{Q}'(d)$ sont équivalentes.

Proposition. *Si* θ *est irrationnel,*

$$\deg\theta = \limsup_{q\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}\right)$$

Démonstration : On note tout d'abord que si p est un entier quelconque et q un naturel non nul, on a $|q\theta - p| \leq \|q\theta\|$. Par suite, $|\theta - \frac{p}{q}| \leq \frac{\|q\theta\|}{q}$.

Si $d < \deg\theta$, l'équation $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^d}$ a une infinité de solutions. En les regroupant par ordre de q croissant, on obtient une suite (q_n) croissante de naturels de limite $+\infty$ et telle que $\|q_n\theta\| < \frac{1}{q_n^{d-1}}$, donc $1 - \frac{\ln\|q_n\theta\|}{\ln q_n} > d$. Ce qui montre $\limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) \geq d$, et donc $\limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) \geq \deg\theta$.

D'autre part, si $d < \limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q})$, alors il existe une suite (q_n) de naturels non nuls, de limite $+\infty$ telle que $1 - \frac{\ln\|q_n\theta\|}{\ln q_n} > d$. Alors $\|q_n\theta\| \leq \frac{1}{q_n^{d-1}}$. Mais alors il existe une suite p_n d'entiers telle que $|q_n\theta - p_n| \leq \frac{1}{q_n^{d-1}}$, et donc $|\theta - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^d}$. Ce qui donne $d \leq \deg\theta$. Donc $\limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) \leq \deg\theta$.

Donc $\limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) = \deg\theta$.

Il est à noter que la proposition ne tient pas si θ est rationnel, car alors $\limsup_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) = +\infty$ (en convenant $\ln 0 = -\infty$). D'autre part, on montre sans mal que, pour tout $\theta \notin \mathbb{Z}$, $\liminf_{q\to+\infty}(1 - \frac{\ln\|q\theta\|}{\ln q}) = 1$.

Théorème (Dirichlet). *Si θ est irrationnel alors* $\deg\theta \geq 2$.

Démonstration : Soit N un naturel supérieur à 1. On considère $T = \{\flat(q\theta) : 0 \leq q < N\} \cup \{1\}$: on a $\operatorname{card} T = N + 1$. D'autre part, pour $0 \leq r < N$, soit $I_r = [\frac{r}{N}; \frac{r+1}{N}[$, et $\mathcal{I} = \{I_r : 0 \leq r < N\}$. On a $\operatorname{card}\mathcal{I} = N < \operatorname{card} T$, et chaque élément de T appartient à exactement un élément de $\mathcal{I}$. Par conséquent, il existe $\alpha < \beta$ de T et $0 \leq r < N$ tels que $\alpha \in I_r$ et $\beta \in I_r$. Si $\beta = 1$, soit $\alpha = \flat(q\theta)$: alors $1 - \alpha \leq \frac{1}{N}$ et même $1 - \alpha < \frac{1}{N}$ car α est irrationnel, donc $\|q\theta\| < \frac{1}{N}$. Si $\beta \neq 1$, soit $\alpha = \flat(q_1\theta)$ et $\beta = \flat(q_2\theta)$. Alors $\beta - \alpha < \frac{1}{N}$, et donc $\||q_2 - q_1|\theta\| < \frac{1}{N}$ avec $|q_2 - q_1| < N$.

Dans tous les cas, on a donc trouvé $q < N$ tel que $\|q\theta\| < \frac{1}{N}$. De plus, pour tout $A > 0$, on peut toujours, en prenant N suffisamment grand, assurer $q > A$ (il suffit de prendre N tel que $\frac{1}{N} < \|q\theta\|$ pour tout $q \leq A$). Par conséquent, on peut construire une suite (q_n) de limite $+\infty$ telle que $\|q_n\theta\| < \frac{1}{q_n}$, donc $1 - \frac{\ln\|q_n\theta\|}{\ln q_n} > 2$. Ce qui montre $\deg\theta \geq 2$.

Théorème (Liouville). *Si θ est irrationnel et algébrique de degré d (i.e. θ est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré d), alors* $\deg\theta \leq d$.

Soit P un polynôme (non nul) à coefficients entiers de degré d tel que $P(\theta) = 0$. On peut de plus aisément supposer que P n'a pas de zéros rationnels, en divisant le cas échéant par un polynôme convenablement choisi (et éventuellement en multipliant par un dénominateur commun pour retrouver un polynôme à coefficients entiers).

Si p est un entier et q un naturel non nul, alors $q^d P(\frac{p}{q})$ est un entier non nul donc $|q^d P(\frac{p}{q})| \geq 1$, donc $|P(\theta) - P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^d}$. Soit K un majorant de $|P'(x)|$ pour $x \in [\theta - 1; \theta + 1]$. Le théorème des accoissements finis donne, pour $\frac{p}{q} \in [\theta - 1; \theta + 1]$, $|P(\theta) - P(\frac{p}{q})| \leq K|\theta - \frac{p}{q}|$. Par suite, si $\frac{p}{q} \in [\theta - 1; \theta + 1]$, on a $|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{K^{-1}}{q^d}$. D'autre part, si $\frac{p}{q} \notin [\theta - 1; \theta + 1]$, on a $|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^d}$. Par conséquent, si $A = \min(K^{-1}, 1)$, alors l'équation $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$ implique $\frac{p}{q} = \theta$ (faux implique faux). Ce qui donne $\deg\theta \leq d$.

Corollaire. *Tous les nombres de Liouville sont transcendants.*

Corollaire. *Si r est rationnel,* $\deg\sqrt{r} = 2$.

Remarque : Roth a montré qu'en réalité, quel que soit θ algébrique irrationnel, $\deg\theta = 2$.

Théorème. *Si ρ et σ sont rationnels, alors θ et $\rho\theta+\sigma$ ont même degré d'irrationnalité.*

Démonstration : Si θ est rationnel, c'est clair. On suppose donc θ irrationnel. Ecrivons $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\sigma = \frac{\gamma}{\delta}$. Alors $\rho\theta+\sigma-\frac{p}{q} = \rho(\theta - \frac{\beta\delta p - \beta\gamma q}{\alpha\delta q})$. Si $d > \deg\theta$, soit $A > 0$ tel que $|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{A}{q^d}$ pour tout entier p et naturel q non nul (ce qui est possible car θ est irrationnel). Alors on a $|\rho\theta+\sigma-\frac{p}{q}| \geq |\rho|\frac{A}{(|\alpha\delta|q)^d} = \frac{A'}{q^d}$ avec $A' = \frac{A}{\beta\alpha^{d-1}\delta}$. Donc $\deg(\rho\theta+\sigma) \leq d$, donc $\deg(\rho\theta+\sigma) \leq \deg\theta$. Et en inversant la relation, $\deg(\rho\theta+\sigma) = \deg\theta$.

Proposition. *On a $\deg(\theta^2) \geq \frac{1}{2}\deg\theta$.*

Démonstration : Si θ est rationnel, c'est clair ; on suppose donc θ irrationnel. Si $d < \deg\theta$, il existe $A > 0$ et une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$. Pour ces rationnels, on a $|\theta + \frac{p}{q}| < 2\theta + \frac{A}{q^d} \leq 2\theta + A$. Alors $|\theta^2 - \frac{p^2}{q^2}| = |\theta+\frac{p}{q}||\theta-\frac{p}{q}| < \frac{A(2\theta+A)}{q^d} = \frac{A'}{(q^2)^{\frac{d}{2}}}$, donc il existe une infinité de rationnels $\frac{P}{Q}$ tels que $|\theta^2 - \frac{P}{Q}| < \frac{A'}{Q^{\frac{d}{2}}}$, ce qui montre $\deg(\theta^2) \geq \frac{d}{2}$, d'où le résultat.

Généralisant à la fois ce dernier résultat et le théorème de Liouville, on a :

Théorème. *Si P est un polynôme non nul à coefficients entiers de degré n, alors pour tout réel θ, on a $\deg P(\theta) \geq \frac{1}{n}\deg\theta$.*

Démonstration : Si θ est rationnel, le résultat est immédiat ; on suppose donc θ irrationnel. Si $d < \deg\theta$, alors il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}$. Soit K un majorant de $|P'(x)|$ sur $[\theta - A; \theta + A]$. Alors pour chacun des rationnels $\frac{p}{q}$ mentionnés plus haut, on a $|P(\theta) - P(\frac{p}{q})| \leq K|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{KA}{q^d}$. Mais $P(\frac{p}{q})$ est un rationnel de dénominateur q^n, donc il existe une infinité de rationnels $\frac{R}{Q}$ tels que $|P(\theta) - \frac{R}{Q}| < \frac{KA}{Q^{d/n}}$. (On a bien une infinité de $\frac{R}{Q}$ distincts, car tout polynôme non nul est injectif sur un intervalle du type $[\theta; \theta+\varepsilon[$ ou $]\theta-\varepsilon; \theta]$.) Par suite, $\deg P(\theta) \geq \frac{d}{n}$, ce qui montre le résultat.

Corollaire. *Pour tout réel positif θ, on a $\deg\sqrt[n]{\theta} \leq n\deg\theta$.*

Corollaire. *Si θ est un nombre de Liouville, alors $P(\theta)$ est un nombre de Liouville pour tout polynôme P non nul à coefficients entiers. En particulier, tout nombre de Liouville est transcendant (ce qu'on savait déjà).*

Dans ce qui suit, nous désignerons par μ la mesure de Lebesgue.

Pour $A > 0$, $d > 2$, p un entier et q un naturel non nul, on notera $W_{p/q}(A,d) = \{\theta \in [0;1[\mid |\theta - \frac{p}{q}| < \frac{A}{q^d}\}$ et $B_{p/q}(A,d) = \{\theta \in [0;1[\mid |\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{A}{q^d}\}$. On définit de plus $W(A,d) = \bigcup_{\frac{p}{q}\in[0;1[} W_{p/q}(A,d)$ (c'est-à-dire que l'union est prise sur toutes les paires (p,q) où p est un entier et q un naturel non nul telles que $p/q \in [0;1[$). De même, on définit $B(A,d) = \bigcap_{\frac{p}{q}\in[0;1[} B_{p/q}(A,d) = {}^cW(A,d)$. Enfin, on pose $W(d) = \bigcap_{A>0} W(A,d)$, $B(d) = \bigcup_{A>0} B(A,d) = {}^cW(d)$. $W_2 = \bigcup_{d>2} W(d)$, $B_2 = \bigcap_{d>2} B(d) = {}^cW_2$, $W_\infty = \bigcap_{d>2} W(d)$ et $B_\infty = \bigcup_{d>2} B(d) = {}^cW_\infty$.

Si $\theta \in [0;1[$ est rationnel ou bien $\deg\theta > d$, on a $\theta \in W(d)$. Si $\theta \in [0;1[$ est irrationnel et que $\deg\theta < d$, on a $\theta \notin W(d)$. En revanche, si $\deg\theta = d$, on ne peut pas trancher *a priori*. W_2 est l'ensemble de tous les réels $\theta \in [0;1[$ pour lesquels soit θ est rationnel, soit $\deg\theta > 2$, et B_2 l'ensemble de tous les réels $\theta \in [0;1[$ tels que $\deg\theta = 2$. W_∞ est l'ensemble des réels $\theta \in [0;1[$ tels que $\deg\theta = +\infty$, dits nombres de Liouville, ainsi que des rationnels.

Théorème. *Pour presque tous les réels θ, on a $\deg\theta = 2$.*

Démonstration : On a $\mu(W_{p/q}(A,d)) \leq \frac{2A}{q^d}$, donc $\mu(W(A,d)) \leq 2A\zeta(d-1)$ (car $d > 2$). Par suite, $\mu(W(d)) = 0$, et donc $\mu(W_2) = 0$ (W_2 peut s'écrire comme une union dénombrable, par exemple $W_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} W(2+\frac{1}{n})$). En autres mots, presque tous les réels de $[0;1[$ sont dans B_2, et par translation on en déduit le résultat.

Théorème. *L'ensemble des nombres de Liouville est dense.*

Démonstration : L'ensemble $B(A,d)$ est un fermé ; comme il ne contient aucun rationnel, il est rare. Par conséquent, l'ensemble $B(d)$, qui peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles rares, est maigre. Et de même, l'ensemble B_∞, qui peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles maigres, est maigre. Et enfin, $\mathbb{Q}$ étant maigre, $B_\infty \cup (\mathbb{Q} \cap [0;1[)$ est maigre, donc son complémentaire, $W_\infty \setminus \mathbb{Q}$, est dense par le théorème de Baire. Or $W_\infty \setminus \mathbb{Q}$ est précisément l'ensemble des nombres de Liouville de $[0;1[$, et par translation on en déduit le théorème.

Théorème. *L'ensemble des nombres de Liouville est indénombrable.*

Démonstration : Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\{1;2\}$. Pour $n \geq 2$, on définit alors $\xi_n = \sum_{k=2}^n a_k 10^{-k!}$, et $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$. En faisant varier la suite (a_n), on définit clairement ainsi un nombre indénombrable de ξ différents. Montrons que ce sont des nombres de Liouville.

ξ_n est rationnel de dénominateur $q_n = 10^{n!}$. Et on a $|\xi - \xi_n| < 4 \times 10^{-(n+1)!} = \frac{4}{q_n^{n+1}}$. On en déduit immédiatement $\deg\xi = +\infty$.

Nous résumons la situation comme suit : soient $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{L}$ respectivement l'ensemble des rationnels, l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\deg\theta = 2$, l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $2 < \deg\theta < +\infty$ et l'ensemble des nombres de Liouville. Alors presque tous les réels sont dans $\mathbb{D}$: au sens de la mesure de Lebesgue, c'est $\mathbb{D}$ qui est beacoup plus gros que les autres. Mais d'un autre côté, au sens de la catégorie, c'est $\mathbb{L}$ qui l'emporte. En effet, pour montrer qu'il est dense, nous avons montré que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{J}$ est maigre. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{L}$ sont négligeables ; les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{J}$ sont maigres.

Nous allons maintenant nous pencher plus précisément sur l'ensemble $\mathbb{J}$.

Théorème. *Soit $d > 2$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\deg\theta = d$.*

Démonstration : On définit par récurrence une suite $(r_n = \frac{p_n}{q_n})$ de rationnels (vérifiant certaines propriétés), où p_n est un entier, q_n un naturel non nul, et $p_n \wedge q_n = 1$ (p_n et q_n sont premiers entre eux) pour tout n. Pour commencer, soit $p_1 = 1$ et q_1 un naturel supérieur ou égal à 2 tel que $q + 2 < q^{d-1}$ pour tout $q \geq q_1$.

Donné $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, on cherche à construire r_{n+1}. Comme p_n et q_n sont premiers entre eux, p_n est inversible modulo q_n : soit alors $\bar{x} \equiv -p_n^{-1} \pmod{q_n}$. On prend pour q_{n+1} un entier représentant de $\bar{x}$ tel que $q_n^{d-1} < q_{n+1} < 2q_n^{d-1}$ (ce qui est possible car $q_n^{d-1} > q_n+2$). On a donc $q_{n+1}p_n \equiv -1 \pmod{q_n}$m et on définit p_{n+1} par $q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = -1$. Du coup, il est clair que $p_{n+1} \wedge q_{n+1} = 1$, et ceci définit r_{n+1}.

Soit $\theta = \lim_{n\to+\infty} r_n$. On a $r_{n+1} - r_n = \frac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$, et comme $q_n^{d-1} < q_{n+1} < 2q_n^{d-1}$ par hypothèse, on a alors $\frac{1}{2q_n^d} < r_{n+1} - r_n < \frac{1}{q_n^d}$. Par suite, $\frac{1}{2q_n^d} < \theta - r_n < \frac{A}{q_n^d}$, où $A > 0$ est une constante sans intérêt. Il existe donc une infinité de rationnels r_n distincts vérifiant $|\theta - r_n| < \frac{A}{q_n^d}$. Ceci signifie clairement que $\deg\theta \geq d$.

D'autre part, soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel, avec p entier et q un naturel non nul, et de plus $r \neq r_n$ pour tout n. Si q est suffisamment grand, on peut prendre n tel que

$q_n \leq q \leq q_{n+1}$. Alors $q_{n+1} < 2q_n^{d-1} < 2q^{d-1}$. D'autre part, $qq_{n+1}|r - r_{n+1}|$ est un entier non nul, donc $|r - r_{n+1}| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$. Et donc par l'inégalité triangulaire, $|\theta - r| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} - \frac{A}{q_{n+1}^d} = \frac{1}{qq_{n+1}}(1 - \frac{Aq}{q_{n+1}^{d-1}}) \geq \frac{1}{qq_{n+1}}(1 - \frac{A}{q^{d-2}})$. Pour q suffisamment grand, on a alors $|\theta - r| \geq \frac{1}{2qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^d}$, et de plus, le “suffisamment grand” ne dépend pas de n. Par suite, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $r = \frac{p}{q}$ autres que les r_n vérifiant $|\theta - r| < \frac{1}{2q^d}$. Mais les r_n eux aussi vérifient $|\theta - r_n| > \frac{1}{2q_n^d}$, il s'ensuit qu'il n'y a qu'un nombre fini de rationnels $r = \frac{p}{q}$ vérifiant$|\theta - r| < \frac{1}{2q^d}$. Donc $\deg \theta \leq d$. Donc $\deg \theta = d$.

Soit à présent μ_s^* la mesure extérieure p-dimensionnelle de Hausdorff sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$\mu_s^*(E) = \sup_{\varepsilon>0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (l(E_i))^s : E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i,\ \forall i\, (l(E_i) < \varepsilon) \right\}$$

où les E_i sont des intervalles et $l(E_i)$ désigne la longueur de E_i. Autrement dit, $\mu_s^*(E)$ est la borne supérieure sur tous les $\varepsilon > 0$ de la borne inférieure de $\sum_{i=1}^{+\infty}(l(E_i))^s$ sur tous les recouvrements (E_i) de E par des intervalles de longueur inférieure à ε. μ_s^* est une mesure extérieure (métrique) régulière.

Théorème. *Si $s > \frac{2}{d}$, on a $\mu_s^*(W(d)) = 0$.*

Démonstration : $W_{p/q}(A, d)$ est un intervalle et $W_{p/q}(A, d) \leq \frac{2A}{q^d}$. Donné $\varepsilon > 0$, si $A < \frac{\varepsilon}{2}$, les $W_{p/q}(A, d)$ pour $\frac{p}{q} \in [0; 1[$ forment un recouvrement de $W(d)$ par des intervalles de longueur inférieure à ε, et de plus $\sum_{\frac{p}{q}\in[0;1[}(l(W_{p/q}(A, d)))^s < \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(2A)^s}{q^{ds-1}} = (2A)^s\zeta(ds - 1) < \varepsilon^s\zeta(ds - 1)$ car $ds - 1 > 1$. Par suite, $\mu_s^*(W(d)) = 0$.

Conjecture. *Si $0 < s < \frac{2}{d}$, on a $\mu_s^*(W(d)) = +\infty$.*

Commentaire : Si elle est vraie, cette conjecture a des implications très intéressantes. En premier lieu, $W(d)$ a pour dimension de Hausdorff exactement $\frac{2}{d}$. Mais d'autre part, elle implique $\mu_s^*(W(d) \setminus W(d')) = +\infty$ pour tout $0 < s < \frac{2}{d}$ et $d' > d$. Ce qui signifie qu'il existe une infinité non dénombrable de réels ayant coefficient d'irrationnalité entre d et d'. En autre mots, les coefficients d'irrationnalité possibles sont denses dans $[2; +\infty]$.

Pour démontrer cette conjecture, il est probablement nécessaire d'utiliser quelque part la locale compacité de $\mathbb{R}$, de manière à remplacer un recouvrement par une infinité d'intervalles ouverts par un recouvrement par un nombre fini d'ouverts, et ainsi de se ramener au cas fini, ce qui est utile pour minorer la longueur des intervalles. Malheureusement, si $W(d)$ est un G_δ, ce n'est assurément pas un fermé, et il n'est pas du tout évident de trouver un fermé intéressant inclus dans $W(d)$, qui serait alors compact et auquel on pourrait appliquer Borel-Lebesgue. Avis aux amateurs.

Pour finir, il est peut-être intéressant de parler de la classification de Mahler des nombres transcendants. On dit que la hauteur d'un polynôme à coefficients entiers est le plus grand coefficient en valeur absolue. Si ξ est un nombre complexe quelconque à classifier, donnés n et h des naturels non nuls, soit P le polynôme à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à n et de hauteur inférieure ou égale à h tel que $|P(\xi)|$ prenne la plus petite valeur strictement positive. On définit alors $\omega(n, h)$ par $|P(\xi)| = h^{-n\omega(n,h)}$. Puis on pose $\omega_n = \limsup_{h\to+\infty} \omega(n, h)$, $\omega = \limsup_{n\to+\infty} \omega_n$, et ν le plus petit naturel non nul tel que $\omega_n = +\infty$, avec $\nu = +\infty$ si $\omega_n = +\infty$ pour tout n. On répartit alors ξ en quatre classes :

A : si $\omega = 0$ (et $\nu = +\infty$).

S : si $0 < \omega < +\infty$ (et $\nu = +\infty$).
T : si $\omega = \infty$ et $\nu = +\infty$.
U : si $\omega = \infty$ et $\nu < +\infty$.

On peut monter que les nombres A sont précisément les nombres algébriques. Pour tout ξ transcendant, $\omega_n \geq 1$ si ξ est réel, $\omega_n \geq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$ si ξ est complexe. Il est à noter que $\omega_1 = \deg \xi - 1$, si ξ est réel. Presque tous les réels sont des nombres S de type 1 (c'est-à-dire que $\inf_n \omega_n = 1$) et presque tous les complexes de type $\frac{1}{2}$. Si $\xi = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{+\infty} 10^{-k!}$, alors $\xi^{\frac{1}{n}}$ est un nombre U avec $\nu = n$. Les nombres U avec $\nu = 1$ sont les nombres de Liouville. Enfin, on peut montrer qu'il existe des nombres T, ce qui n'est pas très facile.