

# Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps $p$ -adiques

David A. Madore

15 avril 2005

## 1 Introduction

Lorsque  $V$  est une variété projective lisse définie sur un corps  $k$ , on s'intéresse notamment au quotient  $V(k)/R$  de l'ensemble  $V(k)$  des points rationnels de  $V$  par la relation de  $R$ -équivalence : deux points  $x, x' \in V(k)$  sont dits  $R$ -équivalents lorsqu'ils peuvent être reliés par une chaîne d'images de  $\mathbb{P}^1$ , c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite finie  $x = x_0, \dots, x_\ell = x'$  de points rationnels et une suite finie  $f_1, \dots, f_\ell$  de morphismes  $\mathbb{P}^1 \rightarrow V$  définis sur  $k$  tels que pour chaque  $i$  on ait  $f_i(0) = x_{i-1}$  et  $f_i(1) = x_i$ .

Nous nous penchons ici sur le cas des hypersurfaces cubiques  $V$  (cf. [1]), de dimension au moins 2, sur des corps  $k$  dont on supposera toujours que la caractéristique ne divise pas 6 ; on sait qu'au moins pour  $k$  algébriquement clos on a alors  $V(k)/R$  réduit à un élément : une démonstration de ce fait sera rappelée plus bas. On souhaiterait obtenir le même résultat sur d'autres corps, notamment les corps  $p$ -adiques<sup>1</sup> dans le cas de bonne réduction.

Swinnerton-Dyer a prouvé ([2], théorème 1) que pour  $V$  une surface cubique lisse définie sur  $k$  fini, le quotient  $V(k)/R$  est un singleton ; sur une extension algébrique infinie de  $k$ , il n'est pas difficile d'obtenir le même résultat pour  $V$  singulière, et donc, par sections planes, pour  $V$  hypersurface cubique de dimension  $\geq 2$  quelconque.

---

<sup>1</sup>Remarquons en revanche que  $V(k)/R$  n'est *pas* toujours un singleton lorsque  $k$  est le corps  $\mathbb{R}$  des réels : ainsi la surface cubique d'équation projective  $X(X+T)(X-T) = (Y^2 + Z^2)T$  a-t-elle manifestement deux composantes connexes sur les réels, et leurs points ne peuvent donc pas être  $R$ -équivalents ; elle n'est pas lisse, mais la surface cubique  $X(X+T)(X-T) + 10^{-3}XYZ = (Y^2 + Z^2)T$ , elle, l'est, et a encore deux composantes connexes.

Sur un corps  $p$ -adique (avec  $p \geq 5$ ), lorsqu'on a affaire à une hypersurface cubique lisse ayant bonne réduction, on peut essayer de déformer les résultats obtenus sur les corps finis (et leurs extensions algébriques infinies) grâce aux résultats du type de ceux contenus dans [3] (proposition 2) et [4]; ceux-ci nécessitent que les courbes rationnelles  $f_1, \dots, f_\ell$  que l'on trouve sur l'hypersurface soient *très libres*, c'est-à-dire que  $f_i^* T_V$  soit ample : on prouvera que, sur un corps infini, il est possible de faire en sorte qu'elles le soient. Ceci étant, on peut effectivement étendre la situation depuis le corps résiduel; malheureusement, l'utilisation faite des corps infinis ne permet d'obtenir de résultat sur la R-équivalence que pour une extension algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  ayant un corps résiduel infini. En revanche, au niveau de l'équivalence *rationnelle*, c'est-à-dire du groupe de Chow en dimension 0, on obtient bien un résultat sur une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ .

Précisément, le résultat principal prouvé ici est le suivant :

**Théorème 1.1.** *Soit  $K$  un corps  $p$ -adique avec  $p \geq 5$ , et soit  $V$  une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2 sur  $K$  ayant bonne réduction. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur  $V$ , modulo équivalence rationnelle, est nul.*

Par « ayant bonne réduction » on entend que  $V$  est la fibre générique  $\mathfrak{V} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}} \text{Spec } K$  d'une hypersurface cubique lisse  $\mathfrak{V}$  sur  $\mathcal{O}$  (l'anneau des entiers de  $K$ ).

En particulier, on a le corollaire suivant, qui peut être intéressant par lui-même :

**Corollaire 1.2.** *Soit  $V$  une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2 définie sur un corps de nombres  $K$ . Alors en presque toute place  $p$  de  $K$  le groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur  $V_p = V \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } K_p$ , modulo équivalence rationnelle, est nul.*

## 2 Remarques élémentaires sur les hypersurfaces cubiques

De façon générale, on renvoie à [1] pour les généralités sur ce sujet.

Soit  $V$  une hypersurface cubique lisse (dans  $\mathbb{P}^N$ ) sur un corps  $k$  infini dont la caractéristique ne divise pas 6. Pour  $x \in V(k)$  (ou plus généralement

$x \in V(k')$  pour  $k'$  une extension quelconque de  $k$ ) on note  $\Pi(x)$  l'hyperplan tangent à  $V$  en  $x$ , et  $C(x)$  l'intersection de  $V$  avec  $\Pi(x)$  : c'est une hypersurface cubique dans  $\Pi(x)$  dont  $x$  est un point singulier.

On aura occasionnellement besoin du résultat suivant :

**Lemme 2.1.** *Si  $x$  et  $y$  sont deux points (géométriques) distincts de  $V$ , la droite  $(xy)$  (de  $\mathbb{P}^N$ ) est incluse dans  $V$  si et seulement si on a  $x \in C(y)$  et  $y \in C(x)$ . Dans le cas contraire, la droite en question coupe  $V$  en  $x$ , en  $y$  et en un troisième point éventuellement confondu avec  $x$  (exactement lorsque  $y \in C(x)$ ) ou avec  $y$  (exactement lorsque  $x \in C(y)$ ).*

*Démonstration.* Dire  $y \in C(x)$  signifie que la droite  $(xy)$  est contenue dans  $\Pi(x)$ , c'est-à-dire qu'elle est tangente à  $V$  en  $x$ . De même, on a  $x \in C(y)$  si et seulement si la droite  $(xy)$  est tangente à  $V$  en  $y$ . Lorsque  $(xy)$  est incluse dans  $V$ , elle est certainement tangente à  $V$  en chacun de ses points. Pour ce qui est de la réciproque, la restriction à  $(xy)$  de la forme cubique définissant  $V$  ne peut s'annuler avec multiplicité (au moins) 2 en deux points distincts que si elle est nulle : ceci montre que si  $(xy)$  est tangente à  $V$  en  $x$  et en  $y$  alors elle est contenue dans  $V$ . Le dernier point est clair.  $\square$

Il existe ([1], II.12.13) une unique application rationnelle  $V \times V \dashrightarrow V$  (définie sur  $k$ ), notée  $(u, v) \mapsto u \circ v$  (symétrique en les deux variables), définie au moins pour les couples  $(u, v)$  tels que  $u \notin C(v)$  ou  $v \notin C(u)$ , et telle que pour tout couple de cette sorte on ait  $u, v, u \circ v$  alignés ( $\sigma_u: v \mapsto u \circ v$  est appelée la symétrie par rapport à  $u$ ). (Cf. aussi le lemme 2.1.)

Par ailleurs, on rappelle ([1], II.12.9) qu'un point  $x$  de  $V$  est dit *de type général* lorsque  $C(x)$  est réduite et géométriquement irréductible et que le point singulier  $x \in C(x)$  n'est pas conique (c'est-à-dire, cf. [1], II.12.5, que  $C(x)$  n'est pas un cône cubique de sommet  $x$ ). Dans ces circonstances, on sait ([1], *loc. cit.*) que la variété  $C(x)$  est rationnelle (sur le corps  $k$ ) — en particulier, tout ouvert de Zariski non vide de  $C(x)$  contient des points rationnels.

**Lemme 2.2.** *L'ensemble des points (géométriques) de  $V$  de type général est un ouvert de Zariski non vide.*

*Démonstration.* Il est facile de voir que l'ensemble en question est un ouvert. Le point essentiel est de voir que, sur un corps  $k$  algébriquement clos, toute hypersurface cubique lisse  $V$  possède un point de type général (résultat cité dans [1], II.12.12, sans démonstration). Mais en appliquant successivement le

théorème de Bertini pour trouver une section hyperplane lisse, on est ramené au cas où  $V$  est une surface. Or, dans ce cas, un point qui n'est pas de type général est nécessairement situé sur une des 27 droites tracées sur  $V$ , et il existe donc bien des points de type général.  $\square$

L'existence d'un point  $k$ -rationnel de type général implique ([1], II.12.11) que  $V$  est unirationnelle (sur le corps  $k$ ), c'est-à-dire qu'il existe une application rationnelle, finie et dominante, d'un espace projectif vers  $V$  — et notamment que tout ouvert de Zariski de  $V$  possède des points rationnels. En fait, Kollár a prouvé récemment ([5]) que l'hypothèse d'existence d'un point de type général est superflue : toute hypersurface cubique lisse  $V$  sur un corps  $k$  quelconque est  $k$ -unirationnelle dès lors qu'elle possède un point  $k$ -rationnel. Cependant, nous n'utiliserons pas ce résultat.

On aura par ailleurs besoin du résultat facile suivant :

**Lemme 2.3.** *On suppose maintenant que  $V$  est une hypersurface cubique irréductible, non nécessairement lisse, sur  $k$ , toujours de caractéristique ne divisant pas 6. Si les hyperplans tangents à  $V$  (vus comme hyperplans dans  $\mathbb{P}^N$ ) en tous les points géométriques passent par un même point  $O$ , alors  $V$  est un cône cubique de sommet  $O$ .*

*Démonstration.* Écrivons l'équation de  $V$  dans un système  $(x_1, \dots, x_N)$  de coordonnées affines d'origine  $O$ , soit  $a + L(x_1, \dots, x_N) + Q(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, x_N) = 0$ , avec  $L$  une forme linéaire,  $Q$  une forme quadratique et  $C$  une forme cubique, cette dernière étant non nulle. Dire que l'hyperplan tangent à  $V$  en  $(x_1, \dots, x_N)$  passe par  $O$  signifie que  $L(x_1, \dots, x_N) + 2Q(x_1, \dots, x_N) + 3C(x_1, \dots, x_N) = 0$ . Si c'est vrai pour tout point de  $V$ , c'est que  $a + L(x_1, \dots, x_N) + Q(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, x_N)$  divise  $L(x_1, \dots, x_N) + 2Q(x_1, \dots, x_N) + 3C(x_1, \dots, x_N)$ . Or ceci implique clairement que  $a$ ,  $L$  et  $Q$  sont nuls, donc que  $V$  est un cône cubique de sommet  $O$ .  $\square$

(Pour un résultat plus général, voir [6].)

### 3 Familles de courbes rationnelles

Si  $X$  est une variété projective,  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme et  $B \subseteq \mathbb{P}^1$  un sous-schéma fini, on dit que  $h$  est *libre sur  $B$*  lorsque le fibré  $h^*T_X \otimes I_B$  est nef sur  $\mathbb{P}^1$  (i.e. est somme directe de  $\mathcal{O}(a_i)$  avec  $a_i \geq 0$ ), où  $I_B$  est le faisceau d'idéaux définissant  $B$ . Naturellement, dans cette définition, seul compte le

degré de  $B$  : on dit que  $h$  est libre lorsqu'il est libre sur  $\emptyset$ , et très libre lorsqu'il est libre sur un point (ou, si on préfère,  $h^*T_X$  est ample).

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui affirme que si on a une famille de courbes rationnelles qui dominant, de façon séparable, une variété lisse, en gardant un point fixe, alors la plupart de ces courbes sont libres sur ce point :

**Proposition 3.1.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $M$  une variété intègre sur  $k$ , et  $X$  une variété projective lisse sur  $k$ . Soit  $x_0 \in X$ . Soit enfin  $F: M \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme séparable<sup>2</sup> (donc dominant) tel que  $F(M \times \{0\}) = \{x_0\}$ . Alors il existe un ouvert de Zariski non vide  $M^0$  de  $M$  tel que pour  $p \in M^0$  le morphisme  $F_p: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  soit très libre.*

*Démonstration.* Ce résultat découle essentiellement de [4], II.3.10 (première affirmation) ; mais pour la commodité du lecteur, nous en redonnons une démonstration complète.

Considérons le schéma  $Q = \text{Mor}(\mathbb{P}^1, X; 0 \mapsto x_0)$  paramétrant les morphismes  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$  envoyant 0 sur  $x_0$ . D'après la propriété universelle de ce schéma,  $F$  détermine un morphisme  $f: M \rightarrow Q$  tel que  $F$  s'écrive  $F(p, t) = \text{ev}(f(p), t)$ , où  $\text{ev}: Q \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est le morphisme d'évaluation.

Par hypothèse, il existe un ouvert non vide de  $M \times \mathbb{P}^1$  en tout point duquel la différentielle de  $F: M \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est surjective. Il existe donc un point  $t_0 \in \mathbb{P}^1$ , qu'on peut manifestement supposer différent de 0 et de  $\infty$ , et un ouvert  $M^0$  non vide de  $M$  tels que pour tout  $p \in M^0$  la différentielle de  $F$  soit surjective en  $(p, t_0)$ . On va montrer que ce  $M^0$  convient, c'est-à-dire que  $F_p$  est libre sur 0 (donc très libre) pour  $p \in M^0$ .

Soit  $p \in M^0$ . La différentielle de  $F: M \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  est surjective en  $(p, t_0)$ . On a donc également la surjectivité de la différentielle de  $\text{ev}: Q \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  en  $(f(p), t_0)$ .

Remarquons à présent que  $\text{ev}: Q \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}) \rightarrow X$  peut se factoriser<sup>3</sup> à travers le morphisme  $\text{ev}_{t_0}: Q \rightarrow X$  donné par  $\text{ev}_{t_0} = \text{ev}(\cdot, t_0)$ . En effet, si on considère la flèche  $Q \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}) \rightarrow Q$  qui envoie  $([h], t)$  sur  $[h \circ \tau_t]$ , où  $\tau_t: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est défini par  $\tau_t(t') = tt'/t_0$ , alors manifestement  $\text{ev}$  est la

---

<sup>2</sup>Un morphisme depuis une variété intègre est dit séparable lorsqu'il existe un point auquel sa différentielle est surjective, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle est surjective au point générique.

<sup>3</sup>On comparera cette technique de factorisation avec la première phrase de la démonstration de II.3.10 dans [4]. Le fait de considérer des morphismes depuis  $\mathbb{P}^1$  et non une courbe de genre plus élevé est ici crucial.

composée de cette flèche par  $\text{ev}_{t_0}$ . Puisque la différentielle de  $\text{ev}$  est surjective en  $(f(p), t_0)$  (et que  $\tau_{t_0}$  est l'identité), il s'ensuit que la différentielle de  $\text{ev}_{t_0}$  est elle-même surjective en  $f(p)$ .

Mais alors  $F_p$  est libre sur  $0$ , c'est-à-dire que  $F_p^*T_X \otimes I_0$  (avec  $T_X$  le fibré tangent à  $X$  et  $I_0$  le faisceau d'idéaux associé au sous-schéma fermé  $\{0\}$  de  $\mathbb{P}^1$ ) est nef (est somme de faisceaux inversibles neufs). Cela découle de la description de la différentielle donnée dans [4], II.3.4, et du fait qu'un fibré  $E$  sur  $\mathbb{P}^1$  est somme de faisceaux inversibles neufs si et seulement si on peut trouver une section de  $E$  ayant n'importe quelle valeur prescrite en un point donné, ici  $t_0$ .

Ceci montre que  $F_p$  est très libre, pour  $p \in M^0$ . C'est ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

## 4 R-équivalence libre sur une hypersurface cubique

Dans cette section,  $V$  désigne une hypersurface cubique lisse sur un corps  $k$  infini de caractéristique ne divisant pas 6.

### 4.1 Conditions sur les points

On considère à présent un point  $x \in V(k)$  de type général.

**Lemme 4.1.** *Il existe un ouvert de Zariski  $U$  non vide de  $C(x)$  tel que pour  $z \in U$  on ait  $x \notin C(z)$ .*

*Démonstration.* La condition  $x \notin C(z)$  est certainement ouverte. Le point important est qu'il existe un tel  $z$ . Mais puisque  $x$  n'est pas conique sur  $C(x)$ , il existe une droite de  $\Pi(x)$  passant par  $x$  qui n'est pas contenue dans  $C(x)$  : elle coupe  $V$  en  $x$  (avec multiplicité 2) et un autre point  $z$  (avec multiplicité 1), ce qui donne  $x \notin C(z)$  (voir le lemme 2.1).  $\square$

Pour un tel  $z$ , l'application rationnelle  $(u, v) \mapsto u \circ v$  est bien définie en  $(z, x)$  et on a  $z \circ x = x$  (puisque la droite passant par  $x$  et  $z$  coupe  $V$  avec multiplicité 2 en  $x$  et 1 en  $z$ ).

Considérons maintenant un point  $y \in V(k)$  tel que  $y \notin C(x)$  (toujours avec  $x \in V(k)$  de type général).

En particulier, puisque  $y \notin C(x)$ , on peut dire qu'il existe un ouvert de Zariski  $U'$  non vide de  $C(x)$  tel que pour  $z \in U'$  on ait  $y \notin C(z)$  (« non vide » car il contient  $x$  lui-même). Pour un tel  $z$ , l'application rationnelle  $(u, v) \mapsto u \circ v$  est bien définie en  $(z, y)$ .

Soit  $z \in U'$  : comme nous l'avons dit,  $u \mapsto u \circ y$  est définie en  $z$ ; et alors  $u \mapsto z \circ (u \circ y)$  est également définie en  $z$  et  $y$  vaut  $y$ . La différentielle de cette application est une application linéaire  $T_z V \rightarrow T_y V$ , qui est par ailleurs un isomorphisme (car  $u \mapsto z \circ (u \circ y)$  a pour réciproque  $v \mapsto (z \circ v) \circ y$ , au voisinage de  $y$ ). En particulier, on en déduit une injection  $T_z C(x) \rightarrow T_y V$  qui va nous intéresser tout particulièrement.

**Lemme 4.2.** *Soit  $\xi \in T_y V$  non nul. Alors il existe un ouvert  $U'_1$  non vide de  $C(x)$  (contenu dans  $U'$ ) tel que pour  $z \in U'_1$ , l'image de l'application  $T_z C(x) \rightarrow T_y V$  définie ci-dessus ne contienne pas  $\xi$ .*

*Démonstration.* Considérons  $z \in U'$ . On convient de voir  $T_z C(x)$  et  $T_y V$  comme sous-espaces de  $T_z \mathbb{P}^N$  et  $T_y \mathbb{P}^N$  respectivement. Commençons par remarquer que si  $\eta \in T_z C(x) \subseteq T_z \mathbb{P}^N$  et  $\eta' \in T_y V \subseteq T_y \mathbb{P}^N$  son image par l'application  $T_z C(x) \rightarrow T_y V$  considérée, alors la droite passant par  $z$  de vecteur directeur  $\eta$  et la droite passant par  $y$  de vecteur directeur  $\eta'$  sont coplanaires. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si  $P$  est le plan défini par  $z$ ,  $\eta$  et  $y$ , alors tout se passe dans ce plan (en ce sens que la symétrie de deux points de  $V \cap P$  peut être définie entièrement par des constructions dans  $P$ , et précisément par la symétrie par la cubique plane  $v \cap P$ ), donc  $\eta'$  est forcément lui-même dedans.

Considérons maintenant la droite de  $\mathbb{P}^N$  passant par  $y$  et dirigée par  $\xi$  (vu comme élément de  $T_y \mathbb{P}^N$ ), et soit  $a$  son intersection avec  $\Pi(x)$  (on a supposé que  $y$  n'est pas sur  $C(x)$ , donc, pas dans  $\Pi(x)$ ). Nous n'affirmons pas que  $a$  est un point de  $V$ .

Si  $z \in U'$  est tel que  $\xi$  soit dans l'image de  $T_z C(x)$  dans  $T_y V$ , disons qu'il soit l'image d'un certain  $\eta \in T_z C(x)$ , alors, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, la droite passant par  $z$  et dirigée par  $\eta$  et la droite passant par  $y$  et dirigée par  $\xi$  sont dans un même plan  $P$ . Ainsi, la droite passant par  $z$  et dirigée par  $\eta$  est à la fois dans le plan  $P$  et dans l'hyperplan  $\Pi(x)$ ; c'est donc précisément l'intersection de  $P$  et de  $\Pi(x)$ , qui, par définition de  $a$  est la droite  $(za)$ . On a donc montré que (pour un  $z \in U'$  tel que  $\xi$  soit dans l'image de  $T_z C(x)$ ) la droite  $(za)$  est tangente à  $C(x)$  en  $z$ . C'est-à-dire que  $a$  est situé sur l'hyperplan tangent à  $C(x)$  en  $z$  (vu « à l'ancienne » comme une sous-variété linéaire projective de  $\mathbb{P}^N$ ).

Si on suppose par l'absurde que pour *tout*  $z \in U'$  on ait  $\xi$  dans l'image de  $T_z C(x)$  dans  $T_y V$ , alors tous les hyperplans tangents à  $C(x)$  en ces points, et donc *tous* les hyperplans tangents à  $C(x)$ , passent par  $a$ . Mais ceci prouve que  $C(x)$  est un cône de sommet  $a$  (lemme 2.3). Or on a supposé le contraire (c'est-à-dire que  $x$  était de type général).

C'est donc qu'il existe des — et donc un ouvert non vide  $U'_1$  de — points  $z$  de  $C(x)$  tels que l'image de  $T_z C(x)$  dans  $T_y V$  ne contienne pas  $\xi$ . Ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

## 4.2 Construction d'une famille de courbes

On suppose toujours que  $x \in V(k)$  est de type général, et on suppose que  $x' \in V(k)$  est tel que  $x' \notin C(x)$ . On suppose de plus donné un morphisme  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  tel que  $f(1) = x$  et  $f(0) = x'$ .

Si la différentielle de  $f$  est constamment nulle,  $f$  se factorise par le morphisme de Frobenius ; quitte à le factoriser suffisamment, on peut supposer qu'il existe  $t_0$  tel que  $f'(t_0) \neq 0$ , i.e. il existe un vecteur non nul, disons  $\xi$ , dans l'image de  $T_{t_0} \mathbb{P}^1$  dans  $T_y V$ , où  $y = f(t_0)$ . On peut de plus supposer que  $y \notin C(x)$  (car  $x' \notin C(x)$ ).

D'après ce qu'on a vu précédemment, on peut trouver un ouvert de Zariski  $U_0$  non vide de  $C(x)$  tel que

1. Si  $z \in U_0$  alors  $x \notin C(z)$  (d'après le lemme 4.1) ; ainsi,  $(u, v) \mapsto u \circ v$  est défini en  $(z, x)$ , avec  $z \circ x = x$ .
2. Si  $z \in U_0$  alors  $x' \notin C(z)$  (puisque  $x' \notin C(x)$ , donc certainement il existe beaucoup de  $z \in C(x)$  tels que  $x' \notin C(z)$ ) ; ainsi,  $(u, v) \mapsto u \circ v$  est défini en  $(z, x')$ , et aussi en  $(z, z \circ x')$ , avec  $z \circ (z \circ x') = x'$  ; par conséquent,  $u \mapsto z \circ (u \circ x')$  est défini en  $z$ , et donc au voisinage de  $z$ .
3. Si  $z \in U_0$  alors  $y \notin C(z)$  (mêmes remarques).
4. La différentielle de  $u \mapsto z \circ (u \circ y)$  envoie  $T_z C(x)$  sur un hyperplan de  $T_y V$  qui ne contient pas  $\xi$  (d'après le lemme 4.2).
5. L'ouvert  $U_0$  est isomorphe à un ouvert  $W$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{N-2}$ , disons par  $\varphi: W \rightarrow U_0$  défini sur le corps de base  $k$  (ceci est possible car  $C(x)$  est rationnel sur  $k$  comme on l'a déjà signalé).

Fixons maintenant  $z \in U_0(k)$ .

Définissons une application rationnelle  $F: C(x) \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$  par  $F(u, t) = z \circ (u \circ f(t))$ .

D'après les propriétés énumérées ci-dessus pour  $U_0$ , on voit que  $F$  est définie au moins en  $(u, 1)$  pour tout  $u \in U_0$  (où elle vaut  $x$ ), ainsi qu'en  $(z, 0)$  (où elle vaut  $x'$ ) et en  $(z, t_0)$  (où elle vaut  $y$ ).

Par ailleurs, la différentielle de  $F$  en  $(z, t_0)$  est une application linéaire  $T_z C(x) \oplus T_{t_0} \mathbb{P}^1 \rightarrow T_y V$  qui est un isomorphisme (il y a égalité des dimensions, et la surjectivité est assurée par le fait que  $\xi$ , base de  $T_{t_0} \mathbb{P}^1$ , ne tombe pas dans l'image de  $T_z C(x)$  dans  $T_y V$ ). Cela implique que  $F$  est séparable, et notamment dominante.

### 4.3 Modification de la famille de courbes

On reprend les notations de la section précédente.

On a choisi un isomorphisme  $\varphi: W \rightarrow U_0$  avec  $W$  un ouvert de  $\mathbb{P}^{N-2}$  et  $U_0$  ouvert de  $C(x)$  aux propriétés miraculeuses. Puisque  $z \in U_0(k)$ , quitte à reparamétriser, on peut supposer que  $O \in W$  et  $\varphi(O) = z$ , où par  $O$ , on entend le point  $(1: 0: \dots: 0)$  de  $\mathbb{P}^{N-2}$ . Par ailleurs, on appellera  $0$  le point  $(1: 0)$  de  $\mathbb{P}^1$  et  $1$  le point  $(1: 1)$ .

Posons  $G(u, t) = F(\varphi(u), t)$  : ceci définit une application rationnelle  $G: \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$  séparable telle que  $G(u, 1) = x$  pour tout  $u$  (d'un certain voisinage de  $O$  dans  $\mathbb{P}^{N-2}$ ) et que  $G(O, 0) = x'$ .

Soit  $\mu: \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-2}$  l'application rationnelle définie par  $\mu((x_0: x_1: \dots: x_{N-2}), (\lambda_0: \lambda_1)) = (\lambda_0 x_0: \lambda_1 x_1: \dots: \lambda_1 x_{N-2})$  (autrement dit, l'homothétie sur la première variable, de centre  $(1: 0: \dots: 0)$ , d'hyperplan à l'infini  $x_0 = 0$ , et de rapport donné par la seconde variable). Il est clair que  $\mu$  est défini au moins en  $(O, 1)$  (où elle vaut  $O$ ) et en  $(O, 0)$  (où elle vaut également  $O$ ).

Soit alors  $H: \mathbb{P}^{N-2} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow V$  définie par  $H(v, t) = G(\mu(v, t), t)$  :  $H$  est définie au moins en  $(O, 1)$  et en  $(O, 0)$ . On voit que  $H(v, 1) = x$  pour tout  $v$  d'un certain voisinage de  $O$  et que  $H(v, 0) = x'$  également pour tout  $v$  d'un certain voisinage de  $O$  ; et  $H$  domine  $V$  car c'était le cas de  $F$ , et même, plus précisément,  $H$  est séparable.

Quitte à restreindre le domaine des  $v$ , on sait qu'on peut trouver un ouvert  $W'$  non vide de  $\mathbb{P}^{N-2}$  tel que  $H(v, t)$  soit défini, pour  $v \in W'$ , pour tout  $t$  : on a alors affaire à un morphisme séparable  $H: W' \times \mathbb{P}^1 \rightarrow V$ .

D'après la proposition 3.1, on sait alors qu'il existe  $v$  (qu'on peut supposer défini sur  $k$  car on a affaire à un ouvert d'un espace projectif!) pour lequel  $h = H_v$  est très libre, et il vérifie toujours  $h(1) = x$  et  $h(0) = x'$ .

On a donc montré le résultat suivant :

**Proposition 4.3.** *Soit  $V$  une hypersurface cubique lisse sur un corps  $k$  infini de caractéristique ne divisant pas 6. Soient  $x, x' \in V(k)$  deux points, avec  $x$  de type général et  $x' \notin C(x)$ . On suppose qu'il existe  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  (défini sur  $k$ ) tel que  $f(1) = x$  et  $f(0) = x'$ . Alors il existe  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  qui vérifie la même condition avec de plus  $h^*T_V$  ample (autrement dit,  $h$  est « très libre »).*

*Plus précisément, il existe un ouvert  $W^0$  non vide de  $\mathbb{P}^{N-2}$  et un morphisme  $H: W^0 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  dominant (et même séparable), tel que pour tout  $v \in W^0$  on ait  $H_v: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  très libre.*

## 4.4 Conclusion

**Proposition 4.4.** *Soit  $V$  une hypersurface cubique lisse, possédant un point rationnel de type général, sur un corps  $k$  infini de caractéristique ne divisant pas 6, et  $x$  et  $x'$  deux points rationnels distincts de  $V$ . On suppose que  $x$  et  $x'$  peuvent être reliés par une chaîne (d'images de)  $\mathbb{P}^1$  sur  $k$  (c'est-à-dire qu'ils sont  $R$ -équivalents). Alors ils peuvent être reliés par une chaîne de  $\mathbb{P}^1$  très libres.*

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour deux points  $x$  et  $x'$  directement  $R$ -équivalents (i.e. il existe un  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  défini sur  $k$  tel que  $f(1) = x'$  et  $f(0) = x$ ). Si  $x$  et  $x'$  sont de type général et que la droite  $(xx')$  n'est pas incluse dans  $V$  (de sorte que  $x' \notin C(x)$  ou  $x \notin C(x')$  d'après le lemme 2.1, et, quitte à les permuter, on peut supposer que c'est la première condition qui vaut), alors on a fini d'après la proposition 4.3.

Sinon, on va trouver un automorphisme birationnel  $\sigma$  de  $V$  (défini en  $x$  et  $x'$ ) tel que les points  $\sigma(x)$  et  $\sigma(x')$  soient de type général et ne soient pas reliés par une droite contenue dans  $V$ . Précisément,  $\sigma$  sera la symétrie par rapport à un point  $y$  de  $V$ .

Dans un premier temps, on veut montrer qu'il existe un ouvert de Zariski non vide  $U_1$  de  $V$  tel que pour  $y \in U_1$  (un point géométrique), si  $\sigma$  désigne la symétrie par rapport à  $y$ , alors  $\sigma$  est définie en  $x$  et en  $x'$ , et la droite reliant  $\sigma(x)$  et  $\sigma(x')$  (dans  $\mathbb{P}^N$ ) n'est pas incluse dans  $V$ .

Considérons d'abord le cas où déjà la droite  $(xx')$  est contenue dans  $V$ , et prouvons l'existence, dans ce cas-là, de  $U_1$  ouvert non vide comme indiqué.

Pour cela, on veut prouver d'abord qu'il existe des plans  $\Sigma$  passant par  $x$  et par  $x'$  tels que l'intersection de  $\Sigma$  avec  $V$  soit la réunion de la droite  $(xx')$  et d'une conique lisse. Pour le voir, considérons le morphisme  $\phi$  qui à un point  $y$  de  $V$  non situé sur  $(xx')$  associe le plan  $\Sigma = (xx'y)$ , considéré comme

un point de la variété, disons  $\mathbb{E}$ , des plans de  $\mathbb{P}^N$  passant par  $(xx')$ ; il s'agit de voir que ce morphisme a une fibre lisse, ou, ce qui revient au même, que sa fibre générique est lisse, ou encore qu'il est lisse au-dessus du point générique de  $\mathbb{E}$ . Si on complète le morphisme  $\phi$  par une projection quelconque sur la droite  $(xx')$  (autrement dit, à un point  $y$  de  $V$  on associe le point de  $\mathbb{E} \times \mathbb{P}^1$  défini par le couple formé du plan  $\Sigma = (xx'y) = \phi(y)$  et de la projection de  $y$  sur  $(xx')$ ), on obtient manifestement un morphisme fini de degré 2 défini sur un ouvert de  $V$ ; comme la caractéristique du corps  $k$  est différente de 2, ce morphisme, et donc le morphisme  $\phi$ , est génériquement lisse. Il existe donc une fibre  $\Sigma$ , et même un ouvert (dans  $\mathbb{E}$ ) de telles fibres, comme nous l'affirions : l'intersection de  $\Sigma$  avec  $V$  est réunion de la droite  $(xx')$  et d'une conique lisse  $\Gamma$ . Puisque  $V$  est lisse en  $x$  et  $x'$ , on peut supposer que  $\Sigma$  n'est tangent à  $V$  ni en  $x$  ni en  $x'$ , donc que ces deux points ne sont pas sur  $\Gamma$ . Et si  $y$  est un point de  $\Gamma$  non situé sur  $(xx')$ , l'automorphisme  $\sigma$  de symétrie par  $y$  est bien défini en  $x$  et en  $x'$ , et la droite reliant les points  $\sigma(x)$  et  $\sigma(x')$  n'est pas contenue dans  $V$ . Ceci montre l'existence de  $U_1$  non vide comme nous l'affirions.

Si la droite  $(xx')$  n'est *pas* incluse dans  $V$ , il est encore plus facile d'assurer l'existence de  $U_1$  non vide : de nouveau on regarde les plans  $\Sigma$  contenant la droite  $(xx')$  et non tangents à  $V$  ni en  $x$  ni en  $x'$ , et la seule situation problématique est celle où  $\Sigma \cap V$  est formé de trois droites, mais même dans ce cas une des trois droites doit ne passer ni par  $x$  ni par  $x'$  et en prenant  $y$  sur cette droite hors des intersections on a ce qu'on voulait. L'existence de  $U_1$  non vide est donc prouvée dans tous les cas.

Reste à assurer encore la condition de type général. Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un ouvert de Zariski  $U_2$  non vide de points  $y$  de  $V$  tels que la symétrie  $\sigma$  par rapport à  $y$  soit définie en  $x$  et  $x'$  et envoie ceux-ci sur des points de type général. Mais on sait qu'il y a un ouvert dense de points de type général (lemme 2.2) : il existe donc un ouvert dense de points  $y$  tels que  $y \circ x$  soit défini et soit de type général; et un ouvert de points  $y$  tels que  $y \circ x'$  soit défini et soit de type général. Leur intersection donne l'ouvert  $U_2$  recherché.

Finalement, en prenant l'intersection  $U_3$  des ouverts non vides  $U_1$  et  $U_2$ , on arrive bien à trouver des points  $y$  géométriques tels que la symétrie  $\sigma$  par rapport à  $y$  envoie  $x$  et  $x'$  sur deux points  $\sigma(x)$  et  $\sigma(x')$  de type général et non reliés par une droite contenue dans  $V$ . Mais on peut faire mieux : il existe des points  $y$  *rationnels* dans  $U_3$  puisque  $V$  est  $k$ -unirationnelle (parce qu'on a supposé l'existence d'un point rationnel de type général — ce qui n'est pas

nécessaire si on utilise [5]).

Par hypothèse, il existe un  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  défini sur  $k$  tel que  $f(1) = x'$  et  $f(0) = x$ . On a une application rationnelle  $\sigma \circ f$  (au-dessus de  $k$ ), définie au moins au voisinage de 1 (et y valant  $\sigma(x')$ ) et au voisinage de 0 (et y valant  $\sigma(x)$ ), qui s'étend en un morphisme  $\mathbb{P}^1 \rightarrow V$  valant  $\sigma(x')$  en 1 et  $\sigma(x)$  en 0, avec, par construction,  $\sigma(x')$  et  $\sigma(x)$  de type général et non situés sur une droite contenue dans  $V$ .

D'après la proposition 4.3, il existe donc  $H: W^0 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow V$  dominant, où  $W^0$  est un ouvert de  $\mathbb{P}^{N-2}$ , tel que  $H(v, 1) = \sigma(x)$  et  $H(v, 0) = \sigma(x')$  pour tout  $v$  de  $W^0$ . En composant avec  $\sigma^{-1}$  (et quitte à restreindre  $W^0$  encore plus pour être défini partout), on obtient la même conclusion avec  $x$  et  $x'$ , ce qui permet de conclure ce qu'on veut, grâce à la proposition 3.1.  $\square$

## 5 R-équivalence sur une surface cubique

### 5.1 Exposition

Dans toute cette section,  $V$  est une *surface* cubique, non nécessairement lisse, définie sur un corps  $k$  infini de caractéristique ne divisant pas 6, définie par  $f \in k[X, Y, Z, T]$  un polynôme homogène de degré 3 (non nul) à quatre indéterminées.

Or la donnée d'un polynôme homogène  $f$  de degré 3 (à quatre indéterminées) équivaut à la donnée d'une forme trilinéaire ( $\varphi: k^4 \times k^4 \times k^4 \rightarrow k$ ) totalement symétrique : on a  $f(P) = \varphi(P, P, P)$  et  $df(P) \cdot Q = 3\varphi(P, P, Q)$  et  $d^2 f(P) \cdot (Q \otimes R) = 6\varphi(P, Q, R)$ .

La surface  $V$  est réductible (sur un corps  $k'$  extension de  $k$ ) lorsque  $f$  peut s'écrire comme produit  $f_1 f_2$  de deux polynômes homogènes (à coefficients dans  $k'$ ), disons  $f_1$  de degré 1 et  $f_2$  de degré 2. Sur la forme  $\varphi$  cela correspond à la relation  $3\varphi(P, Q, R) = f_1(P)\varphi_2(Q, R) + f_1(Q)\varphi_2(R, P) + f_1(R)\varphi_2(P, Q)$  (avec  $\varphi_2$  forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $f_2$ ).

Lorsque  $V$  est réductible, de deux choses l'une : ou bien  $f$  s'écrit comme le produit de trois facteurs linéaires  $f = \ell_1 \ell_2 \ell_3$  définis sur un corps  $k'$ , et  $V$  est l'union (dans  $\mathbb{P}^3(k')$ ) de trois plans ; le degré  $[k' : k]$  est alors au plus égal à 3 (pour  $k'$  un corps minimal de définition de  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ ). Ou bien  $f_2$  définit dans  $\mathbb{P}_k^3$  une quadrique irréductible, et alors  $f_1$  et  $f_2$  sont (i.e. peuvent être trouvés) à coefficients dans  $k$  :  $V$  est l'union d'un plan et d'une quadrique tous deux définis sur  $k$ .

Lorsque ce n'est pas le cas,  $V$  est (géométriquement<sup>4</sup>) irréductible.

On dit qu'un point  $P = (X : Y : Z : T) \in V(k')$  (pour un corps  $k'$  extension de  $k$ ) est un point (au moins) *double* de  $V$  lorsque  $\varphi(P, P, Q) = 0$  pour tout  $Q$  (cette condition ne dépend pas du représentant choisi pour  $P$  dans  $k'^4$ , d'où le léger abus de notation). On dit que  $P$  est *triple* lorsque  $\varphi(P, Q, R) = 0$  pour tous  $Q, R$  (ou, ce qui suffit,  $\varphi(P, Q, Q) = 0$  pour tout  $Q$ ). Un point est singulier si et seulement si il est au moins double; s'il n'y a pas de tel point (sur aucune extension  $k'$  de  $k$ ), la surface  $V$  est dite non singulière. Manifestement, lorsque c'est le cas, elle est irréductible.

La droite (dans  $\mathbb{P}_k^3$ ) joignant deux points (au moins) doubles de  $V$  est entièrement contenue dans  $V$ . (En effet,  $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda^3 f(P) + 3\lambda^2 \mu \varphi(P, P, Q) + 3\lambda \mu^2 \varphi(P, Q, Q) + \mu^3 f(Q)$ , et l'hypothèse garantit que tous les termes sont nuls.) De même, la droite joignant un point triple à un point quelconque de  $V$  est entièrement contenue dans  $V$ ; autrement dit, l'existence d'un point triple  $P$  équivaut à supposer que  $V$  est un cône de sommet  $P$ .

Notons de surcroît que si  $P$  et  $Q$  sont deux points doubles, alors la droite qui les relie (qui, on vient de le voir, est entièrement contenue dans  $V$ ) soit n'a pas d'autre point double qu'eux soit est entièrement constituée de points doubles; en effet, si  $R$  est un point quelconque (de  $k'^4$ , pour  $k'$  une extension quelconque de  $k$ ), on a  $\varphi(\lambda P + \mu Q, \lambda P + \mu Q, R) = 2\lambda\mu\varphi(P, Q, R)$  puisque  $P$  et  $Q$  sont doubles, et cette expression est soit constamment nulle soit ne s'annule que pour  $\lambda = 0$  ou  $\mu = 0$ . De même, si  $P, Q, R$  sont trois points doubles non colinéaires, et que le plan qu'ils définissent n'est pas entièrement contenu dans  $V$ , alors ce plan coupe  $V$  suivant exactement trois droites (les trois droites reliant les trois points), et notamment il n'y a pas d'autre point double situé dans ce plan.

On peut alors distinguer les cas suivants (cf. [7]) :

1.  $f$  s'écrit comme produit  $f = \ell_1 \ell_2 \ell_3$  de trois facteurs linéaires (sur une certaine extension  $k'/k$  de degré au plus 3) :  $V$  est la réunion de trois plans (non nécessairement distincts). L'intersection de ceux-ci est formée de points triples (soit un unique point triple, soit une droite, soit un plan si les trois plans sont confondus).
2.  $f$  s'écrit comme produit  $f = f_1 f_2$  avec  $f_1 = \ell_1$  linéaire et  $f_2$  quadratique, tous deux définis sur  $k$  :  $V$  est la réunion d'une quadrique

---

<sup>4</sup>Le terme « géométriquement » est nécessaire pour recouvrir le cas de la décomposition comme union de trois plans sur lesquels agit transitivement le groupe de Galois absolu de  $k$ . Tous les autres cas de réductibilité géométrique sont déjà réductibles sur le corps  $k$ .

irréductible (éventuellement singulière) et d'un plan. L'intersection de ceux-ci est formée de points doubles de  $V$ , et il n'y a pas de point triple.

3.  $f$  est irréductible et possède un unique point triple  $P$ , nécessairement à coordonnées dans  $k$  :  $V$  est alors un cône de sommet  $P$ . Il se peut que  $V$  n'ait aucun point exactement double, ou qu'elle en ait précisément une droite (nécessairement définie sur  $k$ ).
4.  $V$  est irréductible, ne possède pas de point triple, mais possède une infinité de points (exactement) doubles. Ceux-ci forment alors une droite (nécessairement définie sur  $k$ ).
5.  $V$  est irréductible et possède exactement quatre points (exactement) doubles, non coplanaires.
6.  $V$  est irréductible et possède exactement trois points (exactement) doubles, non alignés.
7.  $V$  est irréductible et possède exactement deux points (exactement) doubles.
8.  $V$  est irréductible et possède exactement un point exactement double.
9.  $V$  est non singulière.

## 5.2 R-équivalence

On cherche maintenant à étudier la R-équivalence sur  $V$  dans chacun des cas dégagés ci-dessus.

Manifestement, si la droite reliant  $P$  et  $Q$  est contenue dans  $V$ , alors  $P$  et  $Q$  sont R-équivalents. Notamment, tous les points d'un cône sont R-équivalents (s'il existe un point triple dans  $V(k)$ , alors tous les points sont R-équivalents).

Lorsque deux  $k$ -points quelconques de  $V$  sont R-équivalents, c'est-à-dire que  $V(k)/R$  est un singleton, on dira que  $V$  est R-triviale.

Il est prouvé dans [2] (théorème 1) que, sur un corps fini, ou, par conséquent, une extension algébrique infinie d'un corps fini, une surface cubique *non singulière*  $V$  quelconque est R-triviale.

Nous nous proposons d'expliquer pourquoi ceci reste vrai pour une surface cubique quelconque. On suppose dorénavant que  $k$  est une extension algébrique infinie d'un corps fini (de caractéristique ne divisant pas 6).

Nous aurons besoin du fait que, sur une extension algébrique  $k$  d'un corps fini (ou plus généralement sur un corps  $C_1$ ), une surface cubique ayant un

$k$ -point singulier est  $\mathbb{R}$ -triviale ([11], lemme 3). À l'inverse, pour les surfaces cubiques  $V$  dont tous les  $k$ -points sont lisses, l'ensemble  $V(k)/R$  des classes de  $\mathbb{R}$ -équivalence est un invariant  $k$ -birationnel (voir [1], remarque II.14.4), c'est-à-dire notamment que si deux surfaces cubiques sont  $k$ -birationnellement équivalentes et si l'une est  $\mathbb{R}$ -triviale, l'autre l'est aussi : en effet, cela vaut sauf peut-être pour un fermé strict (on a un isomorphisme entre deux ouverts non vides, et il transporte la  $\mathbb{R}$ -équivalence), mais comme les classes de  $\mathbb{R}$ -équivalence sont denses pour la topologie de Zariski ([1], théorème II.13.1(i); voir théorème II.14.3), les points de ce fermé sont  $\mathbb{R}$ -équivalents aux autres. Notamment, une surface cubique  $k$ -rationnelle<sup>5</sup> est  $\mathbb{R}$ -triviale.

On reprend maintenant les cas distingués précédemment :

1. La réunion de trois plans est certainement  $\mathbb{R}$ -triviale car leur intersection est définie sur  $k$ .
2. Si  $V$  est réunion d'un plan et d'une quadrique, alors  $V$  est  $\mathbb{R}$ -triviale : deux points quelconques du plan ou deux points quelconques de la quadrique sont  $\mathbb{R}$ -équivalents ; enfin, l'intersection des deux, qui est une conique éventuellement dégénérée, possède des points sur  $k$  (puisque  $k$  est extension algébrique d'un corps fini).
3. Si  $V$  est un cône, nous avons déjà observé que deux points quelconques sont  $\mathbb{R}$ -équivalents (en passant par le sommet du cône).
4. Si  $V$  possède une droite, définie sur  $k$ , formée de points (exactement) doubles, cette droite contient un  $k$ -point, et on a alors vu que  $V$  est  $\mathbb{R}$ -triviale.
5. Lorsque  $V$  est irréductible et possède exactement quatre points doubles, alors  $V$  est  $k$ -rationnelle : ceci est montré dans [8], §9 ou dans [9], lemme 1.1(ii). Par conséquent,  $V$  est  $\mathbb{R}$ -triviale.
6. Lorsque  $V$  est irréductible et possède exactement trois points doubles, deux choses sont possibles : ou bien  $V(k) = \emptyset$  (ce qui ne peut pas d'ailleurs se produire pour  $k$  extension algébrique infinie d'un corps fini), ou bien  $V$  est  $k$ -rationnelle ; voir [7], §6,9 ou bien [9], lemme 1.1(iii). Dans le premier cas, il n'y a rien à montrer, et dans le second on a vu que  $V$  est  $\mathbb{R}$ -triviale.

---

<sup>5</sup>Lorsque la surface a des  $k$ -points singuliers, l'hypothèse faite sur  $k$  est importante : sinon, un contre-exemple est fourni par la surface cubique sur  $\mathbb{R}$  d'équation  $T(X^2 + Y^2 + Z^2) = X^3$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , dont le  $\mathbb{R}$ -point singulier  $X = Y = Z = 0$ , isolé dans la topologie réelle, est une classe de  $\mathbb{R}$ -équivalence à lui tout seul.

7. Lorsque  $V$  est irréductible et possède exactement deux points doubles, de deux choses l'une :
  - Soit ces deux points sont définis sur  $k$ . Dans ce cas, on a un point singulier défini sur  $k$ , et on a vu que  $V$  est  $R$ -triviale.
  - Soit ces deux points sont définis sur une extension quadratique  $k'$  de  $k$  et conjugués par l'action de Galois. Dans ce cas, d'après [9], théorème 2.2(a,b) (quitte à appliquer deux fois l'opération),  $V$  est  $k$ -rationnellement équivalente à une surface cubique non singulière  $W$ , et on est ramené à ce cas.
8. Lorsque  $V$  est irréductible et possède exactement un point double, ce point est défini sur  $k$ , et on a vu que  $V$  est  $R$ -triviale.
9. Enfin, lorsque  $V$  est non singulière, c'est le résultat de Swinnerton-Dyer que nous avons cité.

Dans tous les cas, nous avons donc prouvé :

**Proposition 5.1.** *Soit  $V$  une surface cubique (non nécessairement lisse) sur un corps  $k$  extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas 6. Alors deux points rationnels quelconques de  $V$  sont  $R$ -équivalents.*

## 6 Déformation et fin

### 6.1 Déformation d'une courbe libre

Soit maintenant  $K$  le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet  $\mathcal{O}$  dont on note  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal et  $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$  le corps résiduel. Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma projectif lisse sur  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}$ , dont on note  $X = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{O}} \mathrm{Spec} K$  la fibre générique et  $X_k = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{O}} \mathrm{Spec} k$  la fibre spéciale. Soient  $x, x' \in X(K) = \mathfrak{X}(\mathcal{O})$  deux points rationnels de  $K$ , dont on note  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in X_k(k)$  la spécialisation (réduction modulo  $\mathfrak{m}$ ). Soit  $f: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X_k$  un  $k$ -morphisme tel que  $f(0) = \tilde{x}$  et  $f(\infty) = \tilde{x}'$ , et tel que  $f^*T_{X_k}$  (fibré sur  $\mathbb{P}_k^1$ ) soit ample, c'est-à-dire que  $f$  est très libre. On se propose de montrer qu'il existe  $F: \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  vérifiant  $F(0) = x$  et  $F(\infty) = x'$  et dont la fibre spéciale soit  $f$ .

On applique la proposition 2 de [3] (voir aussi [4], II.1.7 et II.3.5.4) : celle-ci montre que  $f$  peut s'étendre à  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  (en respectant  $x$  et  $x'$ ) si  $H^1(\mathbb{P}_k^1, (f^*T_{X_k})(-2)) = 0$  (remarquons qu'ici,  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  est isomorphe à  $k$  comme  $k$ -module), ce qui est précisément l'hypothèse que  $f$  est très libre : en fait,

l'obstruction au foncteur des déformations infinitésimales de  $f$  relativement à  $\{\tilde{x}, \tilde{x}'\}$  est précisément un élément de  $H^1(\mathbb{P}_k^1, (f^*T_{X_k})(-2))$ , donc l'hypothèse nous permet d'étendre  $f$  à  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ , et, plus généralement, l'annulation du même  $H^1$  (tensorisé avec  $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$  qui est toujours isomorphe à  $k$ ) permet d'étendre  $f$  à  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}$  une fois qu'on l'a étendu à  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ . Finalement, on peut donc étendre  $f$  à  $\mathcal{O}$  (supposé complet) en un morphisme  $F$  comme recherché, relativement à  $\{x, x'\}$ .

On a donc prouvé :

**Proposition 6.1.** *Soit  $K$  le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet  $\mathcal{O}$  de corps résiduel  $k$ , et soit  $\mathfrak{X}$  un schéma projectif lisse sur  $\mathcal{O}$ , dont on note  $X$  la fibre générique et  $X_k$  la fibre spéciale. Soient  $x$  et  $x'$  deux  $K$ -points de  $X$ . Si les spécialisations<sup>6</sup>  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $x$  et  $x'$  sont  $R$ -équivalentes par des  $\mathbb{P}^1$  très libres, alors  $x$  et  $x'$  sont  $R$ -équivalents.*

## 6.2 Conclusion

D'après la proposition 5.1 ci-dessus, on a :

**Proposition 6.2.** *Soit  $V$  une hypersurface cubique<sup>7</sup> sur un corps  $k$  extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas 6. Alors deux points rationnels quelconques de  $V$  sont  $R$ -équivalents.*

Combinons maintenant ce résultat avec la proposition 4.4. Sur une extension algébrique infinie d'un corps fini (de caractéristique ne divisant pas 6), une hypersurface cubique lisse a toujours un point de type général : en effet, sur un corps algébriquement clos, ils forment un ouvert non vide (lemme 2.2) de la variété irréductible  $V$ , qui a donc des points sur un corps fini suffisamment grand d'après les estimations de Lang-Weil. Si l'on préfère, on peut appliquer le résultat de [5]. On en déduit :

**Proposition 6.3.** *Soit  $V$  une hypersurface cubique lisse sur un corps  $k$  extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas 6. Alors deux points rationnels quelconques de  $V$  sont  $R$ -équivalents par une chaîne de  $\mathbb{P}^1$  très libres.*

En combinant la proposition 6.3 avec la proposition 6.1, on obtient immédiatement :

---

<sup>6</sup>Si ces spécialisations sont confondues, on demande qu'il y passe un  $\mathbb{P}^1$  très libre.

<sup>7</sup>Non nécessairement lisse, mais on n'utilisera que le cas lisse.

**Proposition 6.4.** *Soit  $K$  le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet  $\mathcal{O}$  dont le corps résiduel  $k$  est une extension algébrique infinie d'un corps fini de caractéristique ne divisant pas 6, et soit  $V$  une hypersurface cubique lisse dans sur  $K$  ayant bonne réduction. Alors deux points rationnels quelconques de  $V$  sont  $R$ -équivalents, et notamment rationnellement équivalents.*

Reste à expliquer comment on peut classiquement en déduire le théorème 1.1. Pour cela, soit  $K$  un corps  $p$ -adique avec  $p \geq 5$ , de corps résiduel  $\mathbb{F}$  et  $V$  une hypersurface cubique lisse sur  $K$  ayant bonne réduction ; en particulier,  $V$  a un  $K$ -point, disons  $a$ . Commençons par montrer que tout  $K$ -point  $x$  de  $V$  sur  $K$  est rationnellement équivalent à  $a$ . On considère deux extensions algébriques infinies  $k_1$  et  $k_2$  de  $\mathbb{F}$  dont les degrés sont premiers entre eux, disons, pour fixer les idées,  $[k_1 : \mathbb{F}] = \ell_1^\infty$  et  $[k_2 : \mathbb{F}] = \ell_2^\infty$  avec  $\ell_1, \ell_2$  premiers distincts. Si  $K_1$  et  $K_2$  sont les extensions non ramifiées de  $K$  ayant  $k_1$  et  $k_2$  respectivement pour corps résiduels, la proposition 6.4 s'applique à  $K_1$  et à  $K_2$ . Notamment, elle montre que  $a$  et  $x$  sont rationnellement équivalents tant sur  $K_1$  que sur  $K_2$  ; et donc déjà sur des extensions de degré fini de  $K$  contenues dans  $K_1$  et  $K_2$  respectivement. Ceci signifie (cf. [10], §1.4) que pour certains entiers  $i_1$  et  $i_2$ , on a  $\ell_1^{i_1}([x] - [a]) = 0$  et  $\ell_2^{i_2}([x] - [a]) = 0$ . Mais alors  $[x] - [a] = 0$  d'après une relation de Bézout entre  $\ell_1^{i_1}$  et  $\ell_2^{i_2}$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $a$  sont rationnellement équivalents. Et ceci s'applique encore à toute extension finie  $K'$  de  $K$  : si  $x$  est un point géométrique de  $V$  de corps résiduel  $K'$ , alors il est encore rationnellement équivalent, sur  $V_{K'}$ , à  $a \otimes_K K'$ . En poussant par le morphisme fini  $p: V_{K'} \rightarrow V$  (cf. [10], *loc. cit.*), on en conclut que  $[x] - d[a] = 0$  où  $d = [K' : K]$ . Autrement dit, tout point fermé de  $V$  est rationnellement équivalent à un multiple de  $a$ , ce qui conclut.

## Références

- [1] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).
- [2] H. P. F. Swinnerton-Dyer, « Universal Equivalence for Cubic Surfaces over Finite and Local Fields », *Istituto Nazionale di Alta Matematica Francesco Severi, Symposia Mathematica*, **24** (1981), 111-143.
- [3] S. Mori, « Projective manifolds with ample tangent bundles », *Annals of Mathematics*, **110** (1979), 593-606.

- [4] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.
- [5] J. Kollár, « Unirationality of Cubic Hypersurfaces », preprint, disponible sur `xxx.lanl.gov` comme `math.AG/0005146`.
- [6] A. Holme, *Embeddings, projective invariants and classifications*, Universidad Nacional Autónoma de México, Monografías del Insituto de Matemáticas (1979).
- [7] B. Segre, « On Arithmetical Properties of Singular Cubic Surfaces », *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 84–91.
- [8] B. Segre, « A Complete Parametric Solution of Certain Homogeneous Diophantine Equations of Degree  $n$  in  $n + 1$  Variables », *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 46–55.
- [9] D. F. Coray & M. A. Tsfasman, « Arithmetic on Singular Del Pezzo Surfaces », *Proc. London Math. Soc.* (3), **57** (1988), 25–87.
- [10] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).
- [11] D. Madore, « Une observation sur la R-équivalence sur les hypersurfaces cubiques sur les corps  $p$ -adiques », in *Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (2005).