

B-A-BA de cartographie

David A. Madore

21 mai 2001

CVS :

\$Id: carto.tex,v 2.9 2001/05/21 13:37:23 david Exp \$

Table des matières

1	Présentation et notations	2
1.1	La sphère	2
1.2	Éléments de trigonométrie sphérique	3
1.2.1	Formules élémentaires	3
1.2.2	Formules des demi-angles et demi-côtés	4
1.2.3	Formules de Gauss	5
1.2.4	Analogies de Napier	6
1.2.5	Autres formules	6
1.2.6	Un exemple	7
2	Généralités sur les projections	8
2.1	Introduction	8
2.2	Projections équivalentes	9
2.3	Projections conformes	9
3	Projections azimuthales	11
3.1	Généralités	11
3.2	Projection stéréographique	12
3.3	Projection gnomonique	13
3.4	Projection azimuthale équidistante	15
3.5	Projection azimuthale équivalente de Lambert	16
3.6	Projection orthographique	17

4	Projections équatoriales	18
4.1	Généralités	18
4.2	Projection de Mercator	19
4.3	Projection équirectangulaire	20
4.4	Projection cylindrique	21
5	Projections coniques	22
5.1	Généralités	22
5.2	Projection conique conforme de Lambert	23
6	Quelques autres projections	24
6.1	Projection sinusoïdale	24
6.2	Projection de Bonne	25
6.3	Planisphère équivalent de Mollweide	25

1 Présentation et notations

1.1 La sphère

La Terre sera identifiée, pour les besoins de la cause, à une sphère Σ de rayon unité centrée à l'origine de \mathbb{R}^3 . Le pôle nord est le point de coordonnées $(0, 0, 1)$.

La *longitude* et la *latitude* sont définies ainsi : le point de longitude $-\pi \leq \phi \leq \pi$ et de latitude $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ a les coordonnées cartésiennes

$$(\cos \phi \cos \lambda, \sin \phi \cos \lambda, \sin \lambda) \tag{1}$$

En particulier, on remarque que la latitude est mesurée vers le nord à partir de l'équateur, et la longitude vers l'est à partir d'un méridien de référence arbitraire.

L'élément de longueur dans l'espace euclidien étant $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ avec $x = \cos \lambda \cos \phi$, $y = \cos \lambda \sin \phi$ et $z = \sin \lambda$, on obtient l'élément de longueur sur la surface de la sphère :

$$ds^2 = \cos^2 \lambda d\phi^2 + d\lambda^2 \tag{2}$$

Pour élément de surface, on prend

$$\omega = \cos \lambda d\phi \wedge d\lambda \tag{3}$$

(prolongée de façon unique aux pôles), et on l'utilise pour orienter la sphère.

L'aire de la sphère est

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda d\lambda = 4\pi \quad (4)$$

1.2 Éléments de trigonométrie sphérique

1.2.1 Formules élémentaires

Si A, B, C sont trois points sur la surface de la sphère Σ non situés sur un même grand cercle, autrement dit ABC est un triangle sphérique, on note a, b, c respectivement les longueurs (sphériques) des côtés BC, CA, AB , et α, β, γ les angles (sphériques) respectifs $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BAC}$. Classiquement, si O désigne le centre de la sphère, a est l'angle \widehat{BOC} et α l'angle entre les plans OAC et OAB , et on a des définitions semblables, *mutatis mutandis* pour b, c et β, γ . (Note : nous ignorons allègrement tous les problèmes d'orientation qui posent l'épineuse question de savoir quand α vaut \widehat{BOC} et quand il vaut $2\pi - \widehat{BOC}$.)

So on suppose un moment (ce qu'on peut toujours faire quitte à effectuer une rotation, qui ne nuira pas à la généralité des formules obtenues) que C est au pôle nord $(0, 0, 1)$ et que B est dans le plan $y = 0$ donc aux coordonnées $(\sin a, 0, \cos a)$ (longitude nulle, latitude $\frac{\pi}{2} - a$), alors A est à la longitude γ et à la latitude $\frac{\pi}{2} - b$, autrement dit aux coordonnées $(\sin b \cos \gamma, \sin b \sin \gamma, \cos a)$. Mais alors le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ vaut $\sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b$, et comme ce produit scalaire est $\cos c$, on a montré

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \quad (5)$$

ce qui peut aussi se réécrire en

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad (6)$$

Et on a évidemment des formules semblables, *mutatis mutandis* pour $\cos a$ et $\cos b$ puis pour $\cos \alpha$ et $\cos \beta$.

Au passage, la distance sphérique $0 \leq d \leq \pi$ entre le point de longitude ϕ et de latitude λ et le point de longitude ϕ' et de latitude λ' esst donnée par

$$\cos d = \sin \lambda \sin \lambda' + \cos \lambda \cos \lambda' \cos(\phi - \phi') \quad (7)$$

Notons par ailleurs que le produit mixte des trois points, $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$, doit valoir $\sin a \sin b \sin \gamma$, ou encore toute permutation cyclique de cette formule, ce qui permet de conclure que

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (8)$$

On a alors la valeur du *cap* δ à prendre pour aller par une géodésique (i.e. un grand cercle) du point de longitude ϕ et latitude λ au point de longitude ϕ' et latitude λ' :

$$\sin \delta = \frac{\sin(\phi' - \phi) \cos \lambda'}{\sin d} \quad \text{et} \quad \cos \delta = \frac{\sin \lambda' - \cos d \sin \lambda}{\cos \lambda \sin d} \quad (9)$$

On a une formule analogue à (5) pour les cosinus des angles. Pour l'obtenir il suffit de considérer le triangle sphérique $A'B'C'$ dual de ABC : A', B', C' sont les points polaires respectifs des grands cercles BC, CA, AB (encore une fois, nous passons sous silence les épineux problèmes d'orientation). Avec les notations évidentes a', b', c' et α', β', γ' , on a $a' = \pi - \alpha$, $\alpha' = \pi - a$ et des formules semblables pour b', c' et β', γ' . La formule (5) appliquée à $A'B'C'$ donne immédiatement :

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \quad (10)$$

et des formules semblables pour $\cos \alpha$ et $\cos \beta$, et la réécriture analogue à (6) :

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (11)$$

et les valeurs correspondantes de $\cos a$ et $\cos b$.

1.2.2 Formules des demi-angles et demi-côtés

La formule (5) décrit encore $\cos c - \cos(a+b) = \sin a \sin b (\cos \gamma + 1)$, c'est-à-dire $2 \sin \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \sin \left(\frac{a+b-c}{2}\right) = 2 \sin a \sin b \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, ou bien $\cos(a-b) - \cos c = \sin a \sin b (1 - \cos \gamma)$, c'est-à-dire $2 \sin \left(\frac{-a+b+c}{2}\right) \sin \left(\frac{a-b+c}{2}\right) = 2 \sin a \sin b \sin^2 \frac{\gamma}{2}$. En divisant ces formules, on déduit :

$$\tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \left(\frac{-a+b+c}{2}\right) \sin \left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{\sin \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \sin \left(\frac{a+b-c}{2}\right)} = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)} \quad (12)$$

où $s = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre, et évidemment des formules analogues pour $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\tan^2 \frac{\beta}{2}$. Les formules duales pour les demi-côtés sont :

$$\tan^2 \frac{c}{2} = -\frac{\cos \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos \left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\right)} = -\frac{\cos \sigma \cos(\sigma - \gamma)}{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta)} \quad (13)$$

(où $\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$) et les permutations cycliques de celle-ci.

1.2.3 Formules de Gauss

Notons (temporairement)

$$M = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad N = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

$$P = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad Q = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

d'une part, et

$$M' = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad N' = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$P' = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \quad Q' = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

de l'autre.

On a

$$MQ = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin \frac{c}{2}} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin c} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = M'Q'$$

où on a utilisé (8) dans l'égalité du milieu. De même, on a $NP = N'P'$.

On a également

$$MN = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin \frac{c}{2}} = \frac{\sin(a+b)}{\sin c} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin c}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos b + \sin \beta \cos a}{\sin \gamma} = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma}$$

$$= \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = M'N'$$

où les deux égalités dans la deuxième ligne sont obtenues d'abord par (8) puis par utilisation des formules analogues à (11) pour $\cos b$ et $\cos c$. De même, on a $PQ = P'Q'$.

Par dualité, ou bien de façon semblable, on montre $MP = M'P'$ et $NQ = N'Q'$.

Dès lors, $M^2PQ = M'^2P'Q'$, et donc $M^2 = M'^2$ (nous laissons au lecteur le soin de justifier la division, c'est-à-dire d'étudier les limites $P = 0$ et $Q = 0$).

Avec des orientations convenablement effectuées, on peut conclure $M = M'$. Alors, $N = N'$, $P = P'$ et $Q = Q'$. Ce sont là les formules de Gauss :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} &= \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} & \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} &= \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \\ \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} &= \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} & \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} &= \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

Et évidemment on a encore toutes les formules obtenues à partir de (14) par permutation circulaire (identique) des variables a, b, c et α, β, γ (soit douze formules de Gauss au total).

1.2.4 Analogies de Napier

En combinant deux à deux les formules de Gauss (14), on obtient les formules suivantes, appelées *analogies de Napier* :

$$\begin{aligned} \tan \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= \tan \frac{a + b}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \tan \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} &= \tan \frac{a + b}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cot \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a - b}{2} &= \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{a + b}{2} \\ \cot \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a - b}{2} &= \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{a + b}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

(douze analogies de Napier).

1.2.5 Autres formules

Reste enfin à dire quelques mots sur l'aire ε d'un triangle sphérique. Pour cela, on remarque que l'aire d'un dièdre sphérique d'angle α aux sommets a une aire de 4α (puisque la sphère entière, dièdre d'angle π , a pour aire 4π , on l'a vu en (4), et que l'aire d'un dièdre est manifestement proportionnelle à l'angle aux sommets). Si on considère les trois dièdres ayant pour sommets les trois sommets du triangle considéré, leur aire vaut $4(\alpha + \beta + \gamma)$, et ils recouvrent la totalité de la sphère plus encore deux fois le triangle et deux fois son triangle antipodal, soit $4(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi + 4\varepsilon$, et

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi = 2\sigma - \pi \quad (16)$$

Il existe d'autre part une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle sphérique à partir des longueurs de ses trois côtés sans passer par ses angles. Rappelons qu'on a posé $s = \frac{a+b+c}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned} \tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-c}{2} &= \frac{\cos \frac{c}{2} - \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2} + \cos \frac{a+b}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha+\beta-\pi}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta-\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{4} \cos \frac{\varepsilon-2\gamma}{4}}{\cos \frac{\varepsilon}{4} \sin \frac{\varepsilon-2\gamma}{4}} \end{aligned}$$

(la première égalité est $\tan u \tan v = \frac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{\cos(u-v) + \cos(u+v)}$, et la seconde est une application des formules de Gauss (14)). De même,

$$\begin{aligned} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha+\beta-\pi}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta-\pi}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{4} \sin \frac{\varepsilon-2\gamma}{4}}{\cos \frac{\varepsilon}{4} \cos \frac{\varepsilon-2\gamma}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant ces deux formules,

$$\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2} = \tan^2 \frac{\varepsilon}{4} \quad (17)$$

C'est la formule recherchée, appelée formule de l'Huilier. On remarquera qu'elle généralise pour un triangle sphérique la formule classique (attribuée à Héron d'Alexandrie) qui donne l'aire d'un triangle plan dont les côtés sont a, b, c (à savoir : $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$).

1.2.6 Un exemple

Considérons le triangle sphérique dont les sommets sont Londres (A), New York (B) et Buenos Aires (C). La consultation d'un atlas donne les valeurs suivantes (ces valeurs, comme toutes celles données dans cet exemple, sont approximatives) :

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 51^\circ 30' & \lambda_B &= 40^\circ 43' & \lambda_C &= -34^\circ 36' \\ \phi_A &= -0^\circ 10' & \phi_B &= -74^\circ 01' & \phi_C &= -58^\circ 27' \end{aligned}$$

La formule (7) permet alors de calculer les distances :

$$\begin{aligned} c &= d_{AB} = 50^\circ 05' = 5\,575 \text{ km} \\ a &= d_{BC} = 76^\circ 40' = 8\,535 \text{ km} \\ b &= d_{CA} = 100^\circ 05' = 11\,141 \text{ km} \end{aligned}$$

La formule (9) permet ensuite de calculer les caps :

$$\begin{aligned}\delta_{AB} &= -71^\circ 41' & \delta_{AC} &= -134^\circ 40' \\ \delta_{BC} &= 166^\circ 53' & \delta_{BA} &= 51^\circ 14' \\ \delta_{CA} &= 32^\circ 32' & \delta_{CB} &= -12^\circ 04'\end{aligned}$$

et les angles :

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta_{AB} - \delta_{AC} = 62^\circ 59' \\ \beta &= \delta_{BC} - \delta_{BA} = 115^\circ 39' \\ \gamma &= \delta_{CA} - \delta_{CB} = 44^\circ 36' \\ \alpha + \beta + \gamma &= 223^\circ 14'\end{aligned}$$

d'où finalement la surface du triangle ABC :

$$\varepsilon = 0.7547 \text{ sr} = 30\,702\,000 \text{ km}^2$$

Cette surface est plus grande que celle ($23\,246\,000 \text{ km}^2$) du triangle plan ayant les mêmes longueurs de côtés.

À titre de comparaison, le triangle euclidien (dans l'espace !) qui a ses sommets en A, B, C a pour longueurs de côtés $5\,399 \text{ km}$, $7\,912 \text{ km}$ et $9\,778 \text{ km}$ (ce sont donc les distances entre ces trois villes si on passe à travers la Terre), et pour angles $53^\circ 56'$, $92^\circ 35'$ et $33^\circ 29'$; sa surface est de $21\,336\,000 \text{ km}^2$.

2 Généralités sur les projections

2.1 Introduction

Par une projection (cartographique) on entendra un C^∞ -difféomorphisme Ψ entre un ouvert U de la sphère Σ et un ouvert V du plan. Naturellement, U ne peut pas être Σ tout entière : cependant, comme nous ne sommes intéressés que par des considérations d'ordre local (par opposition à topologiques), nous nous contenterons fort bien de projections d'une partie de la Terre. Il sera toutefois utile de savoir quelles projections peuvent être étendues à « quasiment » toute la Terre (c'est-à-dire le complémentaire d'un point, ou d'un demi-grand-cercle, ou quelque chose de cette espèce), et lesquelles ne peuvent couvrir, disons, qu'un hémisphère.

Le plan sera rapporté à un repère cartésien dont les coordonnées sont notées u, v (pour éviter toute confusion avec les coordonnées x, y, z de l'espace dans lequel est plongé Σ). On écrira les composantes de la projection Ψ comme

$$u = \Psi_u(\phi, \lambda) \text{ et } v = \Psi_v(\phi, \lambda) \quad (18)$$

où par abus de notation on a considéré Ψ comme une fonction sur la longitude ϕ et la latitude λ du point considéré.

La matrice jacobienne de Ψ par rapport aux deux systèmes de coordonnées s'écrit

$$J_{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \phi} & \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial v}{\partial \phi} & \frac{\partial v}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (19)$$

où par abus de notation on a écrit $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ pour $\frac{\partial \Psi_u(\phi, \lambda)}{\partial \phi}$, et de même pour les autres composantes.

2.2 Projections équivalentes

On dit qu'une projection cartographique est *équivalente* lorsqu'elle préserve les aires (orientées), c'est-à-dire qu'elle transforme la 2-forme différentielle $du \wedge dv$ d'aire sur le plan en la 2-forme $\omega = \cos \lambda d\phi \wedge d\lambda$ (voir (3)) sur la sphère. Avec $\Psi^* du = \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda$ et $\Psi^* dv = \frac{\partial v}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\lambda$, on a, en introduisant la matrice jacobienne (19), $\Psi^*(du \wedge dv) = (\det J_{\Psi}) d\phi \wedge d\lambda$, et la condition d'être équivalente s'écrit donc :

$$\Psi \text{ équivalente} \iff \det J_{\Psi} = \cos \lambda \quad (20)$$

Remarquons qu'il s'agit là d'une *seule* condition scalaire sur les quatre composantes de la matrice jacobienne.

En tout état de cause, si Ψ est une projection quelconque, on peut toujours considérer la quantité $\frac{\det J_{\Psi}}{\cos \lambda}$. Ce nombre, qu'on appellera *facteur de déformation des aires* correspond à la multiplication apportée aux aires (de la réalité à la carte), au voisinage du point considéré. Naturellement, il n'y a lieu de le considérer qu'à une constante multiplicative près, correspondant à l'échelle nominale reportée sur la carte (en autres mots, nous avons dit qu'une carte est équivalente lorsque son facteur de déformation des aires est constamment 1, mais l'essentiel était qu'il fût égal à une constante — strictement positive — qu'on pouvait toujours par la suite ramener à 1).

2.3 Projections conformes

On dit qu'une projection cartographique est *conforme* lorsqu'elle préserve les angles. Cela revient à dire qu'elle transforme la métrique $du^2 + dv^2$ sur le plan

en une métrique *proportionnelle* (le coefficient de proportionnalité pouvant, bien entendu, varier) à la métrique $\cos^2 \lambda d\phi^2 + d\lambda^2$ (voir (2)) sur la sphère. Or on a

$$\Psi^*(du^2 + dv^2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} \right)^2 \right] d\phi^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right] d\phi d\lambda$$

Et par conséquent :

$$\Psi \text{ conforme} \iff \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} \right)^2 = \cos^2 \lambda \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

La deuxième équation exprime le fait que les méridiens sont, sur la carte, perpendiculaire aux parallèles, et la première exprime le fait que le rapport des éléments de longueur sur les méridiens et les parallèles sont dans la proportion qui est la leur sur la Terre.

Cette équation est peu satisfaisante, notamment en raison de sa nature quadratique. En deux dimensions, pour exprimer la conformité, il est plus opportun d'utiliser les formes holomorphes. Sur la sphère on met la structure complexe déterminée par la forme différentielle $\cos \lambda d\phi + i d\lambda$, et sur le plan la forme $du + i dv$: on a

$$\Psi^*(du + i dv) = \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + i \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) d\phi + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + i \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) d\lambda$$

Par conséquent, on trouve les équations suivantes de type Cauchy-Riemann :

$$\Psi \text{ holomorphe} \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \cos \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial v}{\partial \phi} = -\cos \lambda \frac{\partial u}{\partial \lambda} \end{cases} \quad (22)$$

et Ψ est conforme si et seulement si elle est holomorphe ou anti-holomorphe : quitte à effectuer une symétrie, on supposera toujours que les projections conformes sont holomorphes, donc qu'elles préservent les angles *orientés*.

De même qu'on peut définir en toute généralité un coefficient de déformation des aires, qui permet d'apprécier de combien une projection donnée est près d'être équivalente, on peut aussi définir un facteur d'*anisotropie* qui détermine combien elle est près d'être conforme. Il est cependant pénible d'en donner une formule tout-à-fait générale ; mais voici comment on le construit. Localement en un point la métrique transportée $\Psi^*(du^2 + dv^2)$ du plan par la carte détermine une forme

quadratique sur le tangent à la sphère en ce point, forme quadratique qu'il s'agit de comparer à la forme métrique standard $\cos^2\lambda d\phi^2 + d\lambda^2$; il existe une base, formée de deux directions principales, orthonormale pour la seconde forme quadratique et orthogonale pour la première. Autrement dit, deux vecteurs unitaires orthogonaux sur la Terre qui demeurent orthogonaux sur la carte (ces vecteurs sont d'ailleurs uniquement déterminés dès lors que la carte n'est pas conforme au point considéré). La multiplication des longueurs le long de ces directions détermine précisément l'effet local de la carte; leur produit est le coefficient de multiplication des aires déjà mentionné, et leur rapport est justement le coefficient d'anisotropie. Concrètement, ce coefficient mesure le rapport des axes de l'ellipse image sur la carte d'un cercle sur la Terre, et il vaut 1 lorsque la carte est conforme en ce point. Il n'est pas défini à constante multiplicative près, en revanche il l'est à inversion près, car la division peut se faire dans un sens ou dans l'autre.

3 Projections azimuthales

3.1 Généralités

On appelle *azimuthale* une projection qui transforme les méridiens en rayons également espacés partant de l'origine et les parallèles en cercles concentriques autour de l'origine (non nécessairement régulièrement espacés). Autrement dit, une projection azimuthale est une projection qui prend la forme (quitte à supposer que le méridien de référence est placé verticalement vers le bas) :

$$\Psi(\phi, \lambda) = (\varrho(\theta) \sin \phi), -\varrho(\theta) \cos \phi) \text{ où } \theta = \frac{\pi}{2} - \lambda \quad (23)$$

où ϱ est une fonction de la colatitude θ uniquement, qui détermine la projection particulière.

La raison de l'utilisation de la colatitude θ plutôt que la latitude λ est qu'on travaille au voisinage du pôle : θ mesure précisément la distance au pôle. On choisira ϱ de sorte que $\varrho(0) = 0$ (le pôle est au centre de la figure) et $\varrho'(0) = 1$ (au niveau du pôle, la projection conserve les aires).

Naturellement, ce qu'on appelle « pôle » est une vue de l'esprit, et n'importe quel point de la sphère peut tenir ce rôle : on parlera de projection azimuthale (de tel ou tel type) centrée sur tel ou tel point. En pratique, il est vrai cependant qu'on utilise surtout des projections azimuthales centrées sur le pôle géographique vrai de la Terre (sans doute pour que les parallèles et les méridiens vrais aient des formes simples).

Note Les représentations de la Terre qui ouvrent chacune des sous-sections qui suivent sont toutes dans les différentes projections azimuthales, centrées sur le point de latitude 45° (nord) et de longitude 0 (ce point se situe en France, entre Bordeaux, Agen et Angoulême). Toutes sont à la même échelle (limitée par $\varrho(\theta) = 2$) sauf la projection orthographique qui est à l'échelle exactement double (car $\varrho(\theta)$ n'atteint que la valeur 1).

3.2 Projection stéréographique



Cherchons la valeur de ϱ pour que la projection azimuthale qu'elle détermine par (23) soit conforme. Les équations (22) se traduisent par l'unique équation

$$\varrho(\theta) = \sin \theta \varrho'(\theta)$$

qui se résout pour $\varrho'(0) = 1$ en :

$$\varrho(\theta) = 2 \tan \frac{\theta}{2} \tag{24}$$

C'est l'équation qui définit la projection *stéréographique*.

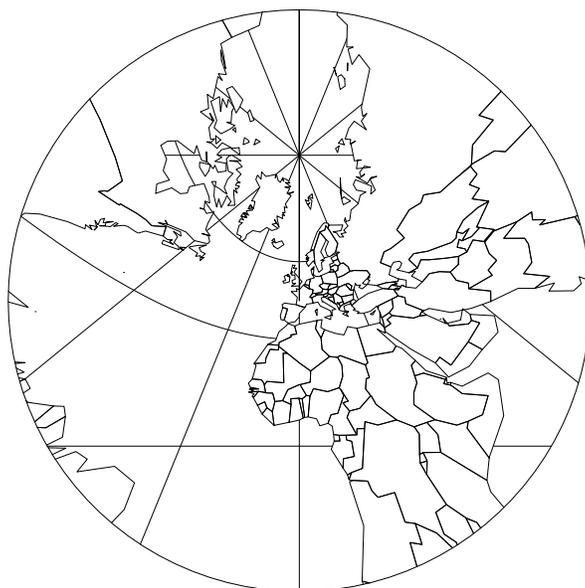
Cette projection a une interprétation géométrique simple : elle revient à projeter la sphère Σ sur le plan Π tangent au pôle nord en utilisant la projection radiale

centrée sur le pôle sud (autrement dit, un point P de Σ se projette sur l'unique point d'intersection de Π avec la droite passant par P et par le pôle sud). La projection stéréographique est définie en tous les points de la sphère excepté le pôle sud (qui s'envoie à l'infini dans toutes les directions).

Mathématiquement, la projection stéréographique identifie le plan complexe avec la sphère de Riemann privée d'un point (c'est un difféomorphisme analytique complexe). Les cercles de la sphère (y compris les grands cercles) sont envoyés sur des cercles (ou des droites) du plan (mais le centre n'est pas préservé) — en effet, il est évident d'après la description géométrique donnée que les cercles doivent devenir des coniques en projection, et le fait que la projection soit conforme assure que ces coniques seront bien des cercles. Faire une rotation sur la sphère se traduit par une homographie complexe sur la projection stéréographique (mais, bien sûr, il y a plus d'homographies complexes que de rotations de la sphère).

En cartographie, la projection stéréographique est utilisée principalement pour la représentation des régions polaires. Le facteur de déformation des aires étant $\frac{\det J_{\Psi}}{\sin \theta} = \frac{\rho'(\theta)\rho(\theta)}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}}$, si on souhaite rester à moins de 15% de variation par rapport au pôle, il faut rester dans un rayon de 30° de celui-ci.

3.3 Projection gnomonique



La projection *gnomonique* est définie sur (23) par :

$$\varrho(\theta) = \tan \theta \quad (25)$$

Cette projection, qui n'est ni équivalente ni conforme, a une interprétation géométrique simple : elle revient à projeter la sphère Σ sur le plan Π tangent au pôle nord en utilisant la projection radiale centrée sur le *centre* de la sphère (autrement dit, un point P de Σ se projette sur l'unique point d'intersection de Π avec la droite passant par P et par le centre), alors que la projection stéréographique utilisait le pôle sud comme origine de projection. Évidemment, la projection gnomonique ne peut s'appliquer qu'à un hémisphère : elle envoie l'équateur à l'infini (chaque point de l'équateur sur le point à l'infini dans la direction considérée) ; si on la prolongeait à l'hémisphère sud, elle le superposerait à l'hémisphère nord, avec rotation de 180° .

La propriété remarquable de la projection gnomonique est qu'elle transforme les grands cercles (c'est-à-dire les géodésiques de la sphère, les « droites » de la géométrie elliptique, appelées « orthodromies » par les navigateurs) en droites. Une droite tracée sur la projection gnomonique est donc bien une droite sur le terrain, et le plus court chemin entre les points reliés. Notamment, si on considère la projection gnomonique centrée sur un point quelconque (lorsqu'on la centre sur le pôle, c'est une évidence), l'équateur et les méridiens deviennent des droites. Par ailleurs, les coniques tracées sur la sphère, et notamment les cercles, restent des coniques en projection gnomonique : un cercle se transforme en ellipse s'il est entier dans l'hémisphère projeté, en parabole s'il est tangent à l'équateur de projection, et en hyperbole s'il le coupe.

Alors que la projection stéréographique identifie la sphère Σ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (la sphère de Riemann, autrement dit la droite complexe projective), la projection gnomonique identifie la sphère quotientée par l'application antipode à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le plan projectif réel. Faire une rotation sur la sphère se traduit par une transformation projective réelle du plan sur la projection stéréographique (mais, bien sûr, il y a plus de transformations projectives réelles du plan que de rotations de la sphère).

En cartographie, la projection gnomonique est rarement utilisée, malgré ses propriétés miraculeuses, car elle déforme encore plus que la projection stéréographique. Le facteur de transformation des aires est $\frac{1}{\cos^3 \theta}$, si on souhaite rester au moins de 15% de variation par rapport au pôle, il faut rester dans un rayon de 17° de celui-ci. Le facteur d'anisotropie est $\frac{\varrho'(\theta) \sin \theta}{\varrho(\theta)} = \frac{1}{\cos \theta}$: il est plus petit (la projection gnomonique est plus près d'être conforme qu'elle ne l'est d'être équivalente), et il est > 1 , ce qui signifie que les formes sont aplaties dans le sens des méridiens (allongées radialement et aplaties angulairement).

3.4 Projection azimuthale équidistante



La projection azimuthale *équidistante* est définie sur (23) par :

$$\varrho(\theta) = \theta \quad (26)$$

Cette projection, qui n'est ni équivalente ni conforme, préserve les caps et les distances à partir du pôle. Elle n'a pas d'interprétation géométrique simple, et elle est transcendante. Elle se prolonge à toute la sphère excepté le pôle sud (encore qu'on peut étendre sa réciproque au plan tout entier, donnant une infinité de cartes concentriques de la Terre, mais ce n'est pas très intéressant).

Son facteur de déformation des aires est $\frac{\theta}{\sin \theta}$, ce qui permet d'aller jusqu'à 51° avec un agrandissement de moins de 15%. Son facteur d'anisotropie est exactement inverse : elle réalise en quelque sorte le compromis exact entre déformation des aires et déformations des formes. Cependant, elle est relativement peu utilisée en cartographie autrement que pour figurer les distances et les caps à partir d'un certain point.

La carte figurant sur le drapeau de l'Organisation des Nations Unies représente le monde en projection azimuthale équidistante centrée sur le pôle nord (et jusqu'à la latitude de -60° , avec cinq cercles concentriques équidistants, donc un tous les 30° de latitude).

3.5 Projection azimuthale équivalente de Lambert



Cherchons la valeur de ϱ pour que la projection azimuthale qu'elle détermine par (23) soit équivalente. L'équation (20) s'écrit

$$\varrho(\theta) \varrho'(\theta) = \sin \theta$$

qui se résout pour $\varrho'(0) = 1$ en :

$$\varrho(\theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (27)$$

C'est l'équation qui définit la projection azimuthale équivalente, dite *de Lambert*.

On peut donner une interprétation géométrique à cette projection, même si elle n'est pas particulièrement passionnante : elle revient à projeter d'abord la sphère Σ sur la sphère Σ' de rayon 2 (le diamètre de Σ) et centrée au pôle sud, en utilisant une projection radiale centrée sur le pôle sud, puis la sphère Σ' sur le plan Π tangent au pôle nord (à Σ ou Σ' , c'est le même) en utilisant la projection orthogonale sur Π (projection depuis le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à Π , comme pour la projection orthographique, cf. *infra*). Elle se prolonge à toute la sphère excepté le pôle sud, qu'elle envoie sur tout un cercle.

En cartographie, cette projection est assez couramment utilisée, que ce soit, centrée sur le pôle, pour des cartes des régions polaires, ou, centrée sur un point de

l'équateur, pour des cartes de régions de basses latitudes. Son facteur d'anisotropie est $\cos^2 \frac{\theta}{2}$, ce qui permet d'aller jusqu'à 42° si on tolère un écrasement de 15% (c'est-à-dire qu'un carré infinitésimal se transforme en un rectangle dont le grand côté est de 15% supérieur au petit); ce facteur est < 1 , ce qui signifie que les formes sont aplaties dans le sens des parallèles (aplaties radialement et allongées angulairement).

3.6 Projection orthographique



La projection *orthographique* est définie sur (23) par :

$$\rho(\theta) = \sin \theta \quad (28)$$

Cette projection, qui n'est ni équivalente ni conforme, a une interprétation géométrique simple : elle revient à projeter la sphère Σ sur le plan Π tangent au pôle nord en utilisant la projection orthogonale sur Π . Évidemment, la projection orthographique ne peut s'appliquer qu'à un hémisphère : elle s'arrête à l'équateur, qu'elle envoie sur un cercle ; si on la prolongeait à l'hémisphère sud, elle le superposerait à l'hémisphère nord, à l'envers.

Son principal intérêt est qu'elle est très visuelle : le cerveau reconnaît immédiatement une sphère en projection orthographique et reconstitue la structure

tridimensionnelle. Par conséquent, si la projection orthographique n'est pas utilisée en cartographie *stricto sensu*, elle est fréquemment utilisée pour représenter visuellement la Terre. Son facteur de déformation des aires est $\cos \theta$, ce qui permet d'aller jusqu'à 31° avec une diminution inférieure à 15%, et son facteur d'anisotropie est également $\cos \theta$, mais comme on vient de le signaler, ces figures sont relativement peu pertinentes.

4 Projections équatoriales

4.1 Généralités

On appelle *équatoriale* une projection qui transforme les méridiens en droites verticales également espacées et les parallèles en droites horizontales (non nécessairement régulièrement espacés). Autrement dit, une projection équatoriale est une projection qui prend la forme (quitte à supposer que le méridien de référence est l'axe des ordonnées et que les distances sont préservées le long de l'équateur) :

$$\Psi(\phi, \lambda) = (\phi, h(\lambda)) \quad (29)$$

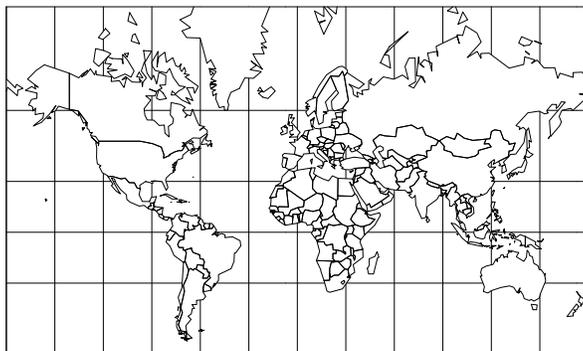
où h est une fonction de la latitude λ uniquement, qui détermine la projection particulière. On choisira h de sorte que $h(0) = 0$ (l'équateur est l'axe des abscisses) et $h'(0) = 1$ (au niveau de l'équateur, la projection conserve les angles et les aires — mais voir la note ci-dessous).

Comme pour les projections azimuthales, où le « pôle » pouvait être n'importe quel point de la Terre (quitte à effectuer une rotation), ici l'« équateur » peut être n'importe quel grand cercle. Cependant, en pratique, on garde l'équateur réel ; cela est encore plus vrai que pour les projections polaires : en effet, alors qu'il peut être intéressant de réaliser une projection centrée sur tel ou tel point de la Terre, il est peu intéressant de donner un statut privilégié à tel ou tel grand cercle, et les projections équatoriales servent surtout à donner une image d'ensemble de la planète. L'exception qui confirme la règle est la représentation dite « Mercator transverse universelle » (UTM en anglais), qui est une projection de Mercator effectuée avec en guise d'« équateur » le méridien $\pm 90^\circ$.

Note Les représentations de la Terre qui ouvrent chacune des sous-sections qui suivent sont toutes dans les différentes projections équatoriales utilisant l'équateur vrai. Elles vont de la latitude -60° à la latitude 80° . Cependant, plutôt que de choisir l'échelle $h'(0) = 1$, on a (en remplaçant h par $\frac{h}{h'(\lambda_0)}$) privilégié le parallèle

de latitude $\lambda_0 = 45^\circ$: c'est sur ce parallèle que la projection conserve à la fois les aires et les angles.

4.2 Projection de Mercator



Cherchons la valeur de h pour que la projection équatoriale qu'elle détermine par (29) soit conforme. Les équations (22) se traduisent par l'unique équation

$$h'(\lambda) \cos \lambda = 1$$

qui se résout pour $h'(0) = 1$ en :

$$h(\lambda) = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (30)$$

C'est l'équation qui définit la projection de *Mercator*. Elle se prolonge à toute la Terre exceptés les pôles (qui partent à l'infini, vers le haut pour le pôle nord et vers le bas pour le pôle sud).

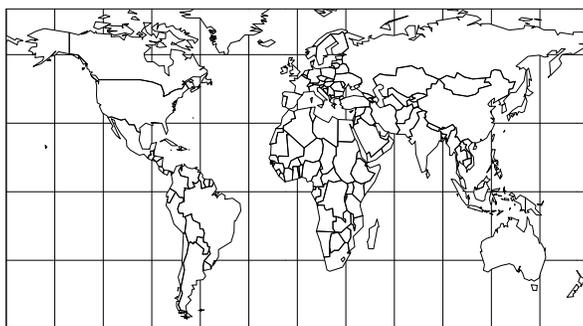
Mathématiquement, cette projection peut être décrite comme le logarithme complexe de la projection stéréographique (plus précisément, avec les conventions que nous en avons faites, elle est l'image de celle-ci par l'application holomorphe $\zeta \mapsto -i \log \zeta + i \log 2 + \frac{\pi}{2}$, au moins pour un choix convenable de détermination du logarithme) ; ceci permet de voir qu'elle est en effet holomorphe.

Une propriété remarquable de la projection de Mercator, qui l'a rendue fort appréciée des navigateurs de l'époque des Grandes Découvertes, concerne les droites tracées sur cette carte. Manifestement, puisque les méridiens sont des droites verticales et que la projection conserve les angles, une droite sur la projection de Mercator coupe les méridiens à angle constant : ce sont donc ces courbes sur la

Terre, baptisées *loxodromies*, qui gardent un cap constant. (On comparera avec la projection gnomonique, qui, elle, transforme en droites les *orthodromies* ou grands cercles.) Naturellement, cela ne vaut que dans la mesure où on a utilisé l'équateur véritable pour baser la projection (cf. les remarques faites plus haut à ce sujet).

Le facteur de déformation des aires par la projection de Mercator est $\frac{h'(\lambda)}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos^2 \lambda}$. Ceci signifie qu'en tolérant un agrandissement jusqu'à 15%, on peut monter jusqu'à la latitude $\pm 21^\circ$: en réalité, on ne se prive pas d'aller bien plus loin — et c'est pourquoi beaucoup de gens sont persuadés que le Groënland a une taille comparable à l'Afrique ! Car la projection de Mercator est souvent utilisée pour donner une représentation générale de la Terre tout entière (surtout quand il s'agit de figurer les fuseaux horaires, d'ailleurs).

4.3 Projection équirectangulaire



La projection *équirectangulaire* est définie sur (29) par :

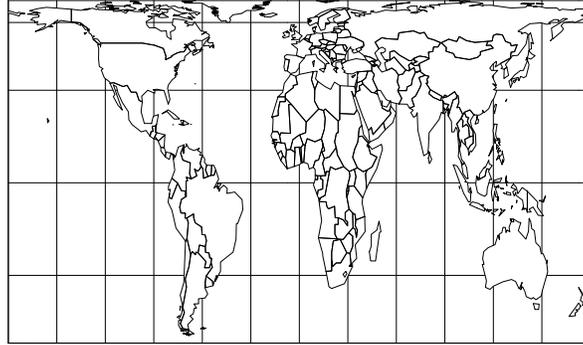
$$h(\lambda) = \lambda \quad (31)$$

C'est donc la projection la plus simple possible : $\Psi(\phi, \lambda) = (\phi, \lambda)$.

Cette projection, qui n'est ni équivalente ni conforme, préserve les distances le long des méridiens. Elle n'a pas d'interprétation géométrique simple, et elle est transcendante. Elle se prolonge à toute la sphère (exceptés éventuellement les pôles qui deviennent des segments horizontaux).

Son facteur de déformation des aires est $\frac{1}{\cos \lambda}$, ce qui permet d'aller jusqu'à 29° avec un agrandissement de moins de 15%. Son facteur d'anisotropie est exactement inverse : elle réalise en quelque sorte le compromis exact entre déformation des aires (projection de Mercator) et déformations des formes (projection cylindrique). Cependant, elle n'est quasiment jamais utilisée en cartographie.

4.4 Projection cylindrique



Cherchons la valeur de h pour que la projection équatoriale qu'elle détermine par (29) soit équivalente. L'équation (20) s'écrit

$$h'(\lambda) = \cos \lambda$$

qui se résout pour $h(0) = 0$ en :

$$h(\lambda) = \sin \lambda \quad (32)$$

C'est l'équation qui définit la projection *cylindrique* équivalente.

On peut donner une interprétation géométrique à cette projection : elle revient à projeter la sphère Σ sur le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 1 (donc tangent à Σ à l'équateur) puis à dérouler ce cylindre.

Le fait que la projection en question soit équivalente généralise le fait bien connu que l'aire d'une sphère est égale à l'aire latérale du cylindre ayant le même rayon et pour hauteur le diamètre de la sphère.

Son facteur d'anisotropie est $\cos^2 \lambda$, ce qui permet d'aller jusqu'à 22° si on tolère un écrasement de 15% ; ce facteur est < 1 , ce qui signifie que les formes sont aplaties dans le sens des parallèles (aplaties verticalement et allongées horizontalement). Encore une fois, on ne se prive pas d'aller plus loin. Dans la pratique, cette projection est surtout utilisée à des fins « politiques », notamment pour redonner aux régions voisines de l'équateur leur taille réelle, qui est faussée par la projection de Mercator.

5 Projections coniques

5.1 Généralités

On appelle *conique* une projection de la Terre sur un cône tangent à la Terre. Cette phrase est absolument dénuée de sens mathématique, mais elle dit bien ce qu'elle veut dire : alors que pour les projections azimuthales on utilisait un plan tangent au pôle nord, et pour les projections équatoriales un cylindre tangent à l'équateur (ensuite déroulé), les projections coniques utilisent un cône tangent à un certain parallèle.

Concrètement, une projection conique est une projection qui transforme les méridiens en rayons partant de l'origine, régulièrement espacés mais ne constituant pas nécessairement un tour complet, et les parallèles en cercles concentriques autour de l'origine (non nécessairement régulièrement espacés). Autrement dit, une projection azimuthale est une projection qui prend la forme (quitte à supposer que le méridien de référence est placé verticalement vers le bas) :

$$\Psi(\phi, \lambda) = (\varrho(\theta) \sin(e\phi), -\varrho(\theta) \cos(e\phi)) \text{ où } \theta = \frac{\pi}{2} - \lambda \quad (33)$$

où ϱ est une fonction de la colatitude θ uniquement, et e un réel strictement positif, normalement $0 < e < 1$. Dans ces conditions, les 2π de méridiens autour du pôle décrivent un angle de $2e\pi$ sur la carte, ce qui fait dire que le cône a un angle de demi-ouverture ω tel que $e = \sin \omega$, ou encore qu'il est tangent à la Terre à la latitude ω . Quant à ϱ , on prendra naturellement $\varrho(0) = 0$; mais l'autre normalisation peut être faite de différentes façons et il n'est pas idoine d'imposer $\varrho'(0) = 1$ comme on l'avait fait pour les projections azimuthales.

Les projections azimuthales correspondent au cas limite $\omega = \frac{\pi}{2}$, soit $e = 1$ (plan tangent au pôle nord, identifiable à un cône de demi-ouverture $\frac{\pi}{2}$). Les projections équatoriales correspondent (mais c'est plus subtil) au cas limite $\omega = 0$, soit $e = 0$, avec une renormalisation d'échelle convenable pour qu'il reste quelque chose à la limite.

Nous ne présentons qu'une seule projection conique, de loin la plus importante : la projection conique conforme de Lambert. On peut certes définir une projection conique équidistante (i.e. équidistante depuis le pôle nord) et une projection conique équivalente, mais elles ne présentent que très peu d'intérêt, et les fonctions ϱ qui les déterminent sont simplement proportionnelles aux fonctions ϱ qui déterminaient les projections azimuthales correspondantes (i.e. la projection azimuthale équidistante et la projection azimuthale équivalente de Lambert).

Note La représentation de la Terre qui ouvre la sous-sections qui suit utilise $\omega = 45^\circ$, soit $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.2 Projection conique conforme de Lambert



Cherchons la valeur de ϱ pour que la projection conique qu'elle détermine par (33) soit conforme. Les équations (22) se traduisent par l'unique équation

$$e\varrho(\theta) = \sin \theta \varrho'(\theta)$$

qui se résout (à constante près) en :

$$\varrho(\theta) = \frac{1}{e} \left(2 \tan \frac{\theta}{2} \right)^e \quad (34)$$

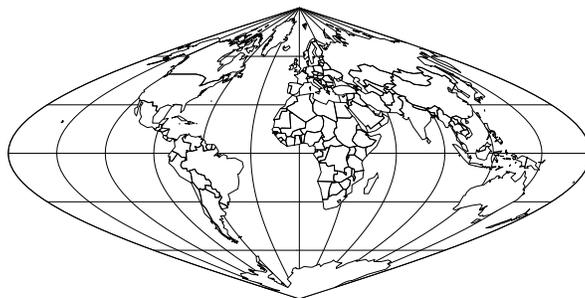
C'est l'équation qui définit la projection conique conforme dite *de Lambert*, où, rappelons-le, $e = \sin \omega$ avec ω la latitude de tangence du cône appelée encore latitude « standard », ou latitude « de référence ».

Mathématiquement, la projection projection conique conforme de Lambert correspond (à déplacement près) à élever la projection stéréographique à la puissance e complexe : cela explique qu'elle soit holomorphe, et aussi qu'elle dégénère pour $e \rightarrow 0$ en la projection de Mercator (rappelons que $\frac{\zeta^e - 1}{e} \rightarrow \log \zeta$ lorsque $e \rightarrow 0$, pour tout ζ complexe modulo les déterminations).

Il faut tordre le cou à certaines fausses idées qu'on rencontre fréquemment au sujet de la projection conique conforme de Lambert. La première est qu'elle déforme hors de son parallèle standard (de latitude ω) ; or cela est faux : la projection est conique, donc elle n'altère pas les formes ; et le long de tout parallèle *donné*, les aires sont conservées. En vérité, la propriété remarquable du parallèle standard est que c'est le long de celui-ci que le facteur de déformation des aires est le plus petit, autrement dit que l'échelle des aires est la plus petite, et elle croît de part et d'autre — mais nous avons déjà expliqué qu'il revenait au même de dire que les aires étaient conservées ici et agrandies là que de dire qu'elles étaient conservées là et rapetissées ici. Ce qui est certain, c'est qu'il convient de mettre le parallèle standard vers le milieu de la région en latitude qu'on veut représenter. La seconde idée fautive est qu'il existe des projections à « deux parallèles standard » ; or cela n'est pas vrai : nous l'avons bien vu, le seul paramètre susceptible de varier est $e = \sin \omega$, qui détermine le rapport d'espacement des méridiens.

6 Quelques autres projections

6.1 Projection sinusoidale

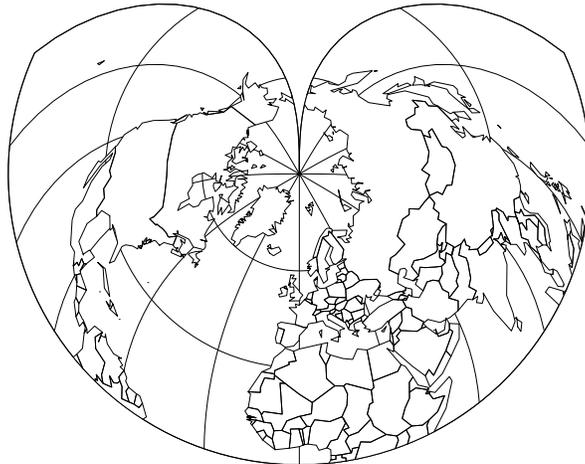


La projection *sinusoïdale* est définie par

$$\Psi(\phi, \lambda) = (\phi \cos \lambda, \lambda) \quad (35)$$

Cette projection est équivalente. On vérifie que c'est l'unique projection équivalente qui transforme les parallèles en droites horizontales régulièrement espacées que les méridiens coupent à intervalles égaux, le méridien de référence déterminant les origines sur ceux-ci. Elle est conforme le long de deux axes : l'équateur d'une part, et le méridien de référence de l'autre.

6.2 Projection de Bonne



La projection *de Bonne* est définie par

$$\Psi(\phi, \lambda) = \left(\theta \sin \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \phi \right), -\theta \cos \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \phi \right) \right) \quad (36)$$

où de nouveau $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ est la colatitude.

Cette projection est équivalente. Elle transforme les parallèles en (arcs de) cercles concentriques et également espacés sur chacun desquels les méridiens sont régulièrement espacés à partir du méridien de référence.

6.3 Planisphère équivalent de Mollweide



Le planisphère *de Mollweide* est défini par

$$\Psi(\phi, \lambda) = (\phi \cos \Theta, \frac{\pi}{2} \sin \Theta) \text{ où } 2\Theta + \sin(2\Theta) = \pi \sin \lambda \quad (37)$$

Cette projection est équivalente (du moins à un facteur multiplicatif près, $\frac{\pi^2}{8}$, telle que nous l'avons présentée). Elle transforme les parallèles en droites horizontales et les méridiens en ellipses.