À propos de la question : un $\mathbb{Z}$-module M est de torsion si et seulement si $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Remarques sur la torsion : On dit qu'un élément x d'un groupe abélien M est *de torsion* lorsqu'il est d'ordre fini, i.e., lorsqu'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $nx = 0$. Il est facile de voir que l'ensemble des éléments de torsion de M forme un sous-groupe de M, qu'on note M_{tors}. On dit que M est *de torsion* (resp. *sans torsion*) lorsque $M_{\mathrm{tors}} = M$ (resp. $M_{\mathrm{tors}} = 0$). Clairement, le sous-groupe M_{tors} est de torsion, et le quotient M/M_{tors} est sans torsion.

On sait (mais on ne s'en servira pas ci-dessous) qu'un groupe abélien *de type fini* et sans torsion est libre ; il n'est pas vrai que tout groupe abélien sans torsion soit libre (contre-exemple : $\mathbb{Q}$, dont on voit facilement qu'il n'est pas libre, alors qu'il est évidemment sans torsion).

Il est aussi vrai (mais on ne s'en servira pas non plus) qu'un groupe abélien *de type fini* est somme directe de son sous-groupe de torsion et d'un supplémentaire sans torsion (cela fait partie du théorème de classification des groupes abéliens de type fini). Ceci non plus n'est pas vrai sans l'hypothèse de type fini. Un contre-exemple est fourni par le quotient du groupe $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles d'entiers par les relations qui identifient e_0 avec $p^k e_k$ où e_k est la suite dont le k-ième terme seulement vaut 1 et tous les autres 0 et p est un nombre premier fixé. (Démonstration : si M est le groupe quotient considéré, et notons $\bar{e}_k$ est l'image de e_k dans M. Soit $\psi\colon M \to \mathbb{Q}$ envoyant $\bar{e}_k$ sur p^{-k} : on voit facilement que le noyau de ψ est justement M_{tors} et que son image est $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{\frac{a}{p^k} : a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$; en particulier, ψ induit un isomorphisme entre M/M_{tors} et $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Soit maintenant N un sous-groupe de M sans torsion, on veut prouver que $M_{\mathrm{tors}} \oplus N$ ne peut pas être M tout entier. Si c'était le cas, ψ définirait un isomorphisme de N sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Ceci impliquerait que $N = pN$ donc $N = p^k N$ pour tout k et en particulier $N \subseteq p^k M$ pour tout k. Or on vérifie facilement que $\bigcap_k p^k M = \mathbb{Z}\bar{e}_0 \cong \mathbb{Z}$, qui ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. ✓) On dit d'ailleurs qu'un groupe abélien est *(torsion-)scindé* lorsque M_{tors} admet un supplémentaire.

Remarques sur le produit tensoriel : Le fait que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ si M est de torsion est clair : si $nx = 0$ pour un $x \in M$ alors $x \otimes \frac{p}{q} = x \otimes \frac{np}{nq} = (nx) \otimes \frac{p}{nq} = 0$. Par exactitude à droite du produit tensoriel, la suite exacte courte $0 \to M_{\mathrm{tors}} \to M \to M/M_{\mathrm{tors}} \to 0$ donne $M_{\mathrm{tors}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to 0$, soit $0 \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to 0$, autrement dit $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (en fait, pour le problème tel qu'il est posé, il suffit de savoir que $(M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un quotient de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). On peut donc si on le souhaite se ramener à M sans torsion.

Si $x \in M$ n'est pas de torsion, il engendre un sous-groupe $\mathbb{Z}x \subseteq M$ de M isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow M$ ainsi formée (de multiplication par x) détermine une application linéaire $\mathbb{Q} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Celle-ci *n'a pas de raison* a priori *d'être injective* (le produit tensoriel n'est pas exact à gauche) et me prouve donc pas que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est pas nul : penser au fait que l'injection naturelle $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ devient, après tensorisation par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la flèche de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. En fait, il s'avère que la conclusion de notre étude sera justement que cette flèche $\mathbb{Q} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est bien injective, et que de façon générale si $M' \hookrightarrow M$ est une injection de groupes abéliens alors la flèche $M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est injective (on dit que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module *plat*).

En revanche, si un sous-groupe $M' \subseteq M$ a le bon goût d'admettre un *supplémentaire* M'', on peut tensoriser $M = M' \oplus N''$ pour trouver $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$: donc dans ces conditions, le fait que $M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$ permet de déduire $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$.

Toutes ces remarques étant faites, passons à la démonstration.

Première méthode

Soit z un élément de M qui n'est pas de torsion (i.e., $Nz = 0$ implique $N = 0$) et on veut prouver que $z \otimes 1$ est non nul dans $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Imaginons une relation qui donnerait l'annulation de $z \otimes 1$: si on construit le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme le groupe abélien libre engendré par les couples (x, r) (où $x \in M$ et $r \in \mathbb{Q}$) quotienté par les relations qui assurent la bilinéarité, la relation de $z \otimes 1$ à zéro signifie que $(z, 1)$ est dans le sous-groupe engendré par un certain ensemble $\mathcal{R}$ (fini) de relations de la forme $(x, r) + (y, r) - (x + y, r)$, $(nx, r) - n(x, r)$ et ainsi de suite. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble (fini, encore) de tous les (x, r) qui interviennent dans une de ces relations, et prenons $N \neq 0$ un dénominateur commun de tous les r pour lesquels il existe un $(x, r) \in \mathcal{C}$. Alors, en envoyant le couple $(x, r) \in \mathcal{C}$ sur l'élément $(Nr)x \in M$, on définit un morphisme $\mathbb{Z}^{\mathcal{C}} \to M$ dont le noyau contient l'ensemble $\mathcal{R}$ de relations (vérification évidente dans chaque cas) et, par conséquent, toute relation engendrée. Ainsi, puisque $(z, 1)$ était réputé être dans le sous-groupe engendré par $\mathcal{R}$, il est aussi dans le noyau, c'est-à-dire que $Nz = 0$. Mais ceci contredit l'hypothèse.

Deuxième méthode

Comme il a été expliqué dans les remarques préliminaires, on peut se ramener à la situation où M est sans torsion, ce qu'on suppose donc.

Sur l'ensemble $M \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ on construit la relation d'équivalence donnée par $(x, q) \sim (x', q')$ si et seulement si $q'x = qx'$ (remarquer que la vérification de la transitivité de cette relation d'équivalence utilise le fait que M est sans torsion : en effet, si $(x, q) \sim (x', q')$ et $(x', q') \sim (x'', q'')$ alors $q'q''x = qq''x' = qq'x''$ et pour conclure $q''x = qx''$ il faut pouvoir simplifier par q'). On note $M_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble quotient $(M \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$, et on notera $\frac{x}{q}$ l'image de (x, q) dans ce quotient. Sur cet ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ on peut définir une addition par $\frac{x}{q} + \frac{x'}{q'} = \frac{q'x + qx'}{qq'}$ et une multiplication par les rationnels par $\frac{p}{q} \cdot \frac{x}{q'} = \frac{px}{qq'}$. On vérifie facilement que ces lois donnent à $M_{\mathbb{Q}}$ une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On a des applications $\mathbb{Q}$-linéaires $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to M_{\mathbb{Q}}$ donnée par $x \otimes \frac{p}{q} \mapsto \frac{px}{q}$ et $M_{\mathbb{Q}} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ donnée par $\frac{x}{q} \mapsto x \otimes \frac{1}{q}$ dont on vérifie immédiatement qu'elles sont inverses l'une de l'autre (il suffit de vérifier sur les tenseurs purs) — ce sont des isomorphismes. On a donc décrit explicitement $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme l'ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ des fractions formelles $\frac{x}{q}$ avec $x \in M$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si x n'est pas nul, $\frac{x}{1}$ n'est pas nul car $(x, 1) \not\sim (0, 1)$. Le produit tensoriel décrit est donc non nul.

En fait, on a obtenu une description explicite de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (y compris si M a de la torsion, puisqu'on a observé plus haut que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; de façon équivalente, on peut quotienter $M \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ par la relation donnée par $(x, q) \sim (x', q')$ lorsque $q'x - qx' \in M_{\mathrm{tors}}$, i.e. $(\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\,(n(q'x - qx') = 0)$).

Troisième méthode

Montrer que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$ équivaut à trouver une forme bilinéaire non nulle $M \times \mathbb{Q} \to P$ pour un certain $\mathbb{Q}$-espace vectoriel P. On va chercher à en construire une pour $P = \mathbb{Q}$.

Soit $x_0 \in M$ un élément qui n'est pas de torsion, i.e., il engendre un sous-groupe $\mathbb{Z}x_0 \subseteq M$ isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il est certain qu'on peut construire une forme bilinéaire $b_0 \colon (\mathbb{Z}x_0) \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ en envoyant (kx_0, n) sur kn. (Ceci prouve que $(\mathbb{Z}x_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$, ce qui est d'ailleurs évident, mais comme on l'a observé dans les remarques préliminaires, cela ne suffit pas à conclure que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$. On pourrait être tenté de chercher un supplémentaire de $\mathbb{Z}x_0$ dans M, mais une telle chose n'existe pas forcément, même si on remplace $\mathbb{Z}x_0$ par l'ensemble de tous les éléments dont un multiple tombe dans $\mathbb{Z}x_0$ — comme le montre une variation triviale de l'exemple donné plus haut d'une situation où M_{tors} n'a pas de supplémentaire dans M.)

On applique le lemme de Zorn[1] à l'ensemble $\mathscr{B}$ des formes bilinéaires $N \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, où $N \subseteq M$ est un sous-groupe contenant x_0 et où b prolonge b_0 (i.e., $b|_{(\mathbb{Z}x_0)\times\mathbb{Q}} = b_0$), cet ensemble étant partiellement ordonné pour le prolongement (c'est-à-dire qu'une forme bilinéaire $b\colon N \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sera considérée comme inférieure ou égale à $b'\colon N' \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ lorsque $N \subseteq N'$ et $b = b'|_{N\times\mathbb{Q}}$). Il est clair que $\mathscr{B}$ est inductif (i.e., toute partie totalement ordonnée de $\mathscr{B}$ admet un majorant dans $\mathscr{B}$, à savoir l'unique forme bilinéaire qui prolonge toutes les formes bilinéaires qu'on s'est données, sur la réunion de leurs ensembles de définition) : le lemme de Zorn garantit donc l'existence d'un $b\colon N\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ maximal. On a toujours $b(x_0, 1) = b_0(x_0, 1)$ par construction, donc $b \neq 0$. Montrons que $N = M$, ce qui conclura.

Supposons au contraire qu'il existe $y \in M \setminus N$, et posons $N' = N + \mathbb{Z}y$ (le sous-groupe engendré par N et y). S'il existe un k tel que $ky \in N$ alors on définit b' sur $N' \times \mathbb{Q}$ prolongeant b en posant $b'(y, r) = \frac{1}{k} b(ky, r)$: il est aisé de voir que b' est bien défini (et que c'est l'unique forme bilinéaire sur $N' \times \mathbb{Q}$ qui prolonge b). Sinon, c'est que N et $\mathbb{Z}y$ sont en somme directe, et on peut définir b' sur $N' \times \mathbb{Q}$ par $b'(x + ky, r) = b(x, r)$ où $x + ky$ est l'écriture unique d'un élément de $N' = N \oplus \mathbb{Z}y$ comme somme d'un élément x de N et d'un élément ky de $\mathbb{Z}y$ (remarquer que k n'est pas bien défini en général, mais peu importe pour la construction que nous faisons). Dans tous les cas, on a strictement prolongé b, ce qui contredit sa maximalité. C'est donc qu'en fait on avait $N = M$, donc b définie sur tout $M \times \mathbb{Q}$ (et non nulle), donc bien $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$.

Quatrième méthode

Un peu d'*abstract nonsense* pour commencer. Supposons que I soit un ensemble préordonné (c'est-à-dire muni d'une relation $\preceq$ réflexive et symétrique) filtrant à droite (c'est-à-dire que pour tous i et i' de I il existe j tel que $i \preceq j$ et $i' \preceq j$). Un *système inductif de groupes abéliens* (indicé par I) est la donnée pour tout $i \in I$ d'un groupe abélien N_i et pour tout couple (i, j) avec $i \preceq j$ d'une application linéaire $\natural_{ij}\colon N_i \to N_j$ vérifiant les conditions de compatibilité suivantes : $\natural_{ii} = \mathrm{id}_{N_i}$ pour tout i, et $\natural_{jk}\natural_{ij} = \natural_{ik}$ lorsque $i \preceq j \preceq k$. Donné un tel système, on appelle *limite inductive* (« filtrante », pour rappeler que I est filtrant à droite) du système, et on note $\varinjlim N_i$, l'ensemble N_∞ quotient de la réunion disjointe des N_i par la relation d'équivalence qui identifie $x_i \in N_i$ à $x_{i'} \in N_{i'}$ lorsque $\natural_{ij}(x_i) = \natural_{i'j}(x_{i'})$ pour un certain j tel que $i \preceq j$ et $i' \preceq j$, qui existe car I est filtrant à droite. (En particulier, bien sûr, si $i \preceq j$, alors $x_i \in N_i$ est identifié à $\natural_{ij}(x_i) \in N_j$ dans la limite inductive.) On définit une addition sur N_∞ en décrétant que la somme de $x_i \in N_i$ et $x_{i'} \in N_{i'}$ est $\natural_{ij}(x_i) + \natural_{i'j}(x_{i'}) \in N_j$ pour n'importe quel j tel que $i \preceq j$ et $i' \preceq j$. Dans ces conditions, les applications canoniques $\natural_{i\infty}\colon N_i \to N_\infty$ (qui envoient un $x_i \in N_i$ sur l'élément qu'il représente dans N_∞) sont des morphismes de groupes abéliens. On peut aussi définir N_∞ par sa propriété (co-)universelle : les morphismes $N_\infty \to P$ (où P est un groupe abélien quelconque) s'identifient exactement (par composition avec les $\natural_{i\infty}$) avec les ensembles de morphismes $N_i \to P$ (un pour chaque $i \in I$) qui font commuter tous les diagrammes évidents.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ se décrit comme la limite inductive filtrante des $\mathbb{Z}$ indicés par les entiers naturels d non nuls ordonnés par la relation de divisiblité, où la flèche $\natural_{dd'}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ lorsque $d|d'$ est la multiplication par d'/d. (C'est peut-être plus clair, quoique moins intrinsèque, de prendre non pas $\mathbb{Z}$ mais $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, qui lui est isomorphe, auquel cas la flèche $\natural_{dd'}$ est l'injection canonique de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ dans $\frac{1}{d'}\mathbb{Z}$.)

([1]) Il est certain qu'on doit utiliser une forme ou une autre de l'axiome du choix : en effet, il est consistant, en l'absence de l'axiome du choix, qu'il existe un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E non nul dont le dual est nul. A fortiori on ne peut pas trouver de forme bilinéaire $E \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. La construction de ce genre d'objets est fort bien expliquée dans *The Axiom of Choice* de T. Jech.

Or il se trouve que *le produit tensoriel commute aux limites inductives filtrantes* (pas seulement pour les groupes abéliens, d'ailleurs, mais pour les A-modules pour n'importe quel anneau A, et d'ailleurs si on sait définir une limite inductive pas filtrante, c'est aussi vrai dans ce cas). Cela résulte de pur *abstract nonsense* : en effet, se donner une application linéaire $M \otimes (\varinjlim N_i) \to P$ équivaut à se donner une application bilinéaire $M \times (\varinjlim N_i) \to P$, ce qui équivaut à se donner un système compatible d'applications bilinéaires $M \times N_i \to P$, ce qui équivaut à se donner un système compatible d'applications linéaires $M \otimes N_i \to P$, ce qui équivaut à se donner une application linéaire $\varinjlim(M \otimes N_i) \to P$, et tout ceci étant vrai pour tout P et de façon naturelle en P, (« par le lemme de Yoneda » si on est savant, mais c'est une trivialité), $M \otimes (\varinjlim N_i)$ est donc naturellement isomorphe à $\varinjlim(M \otimes N_i)$.

En particulier, en prenant la description ci-dessus de $\mathbb{Q}$ comme limite inductive, on voit que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \varinjlim M$ indicé par les entiers naturels non nuls (ordonnés par divisibilité) avec les flèches $\natural_{dd'} : M \to M$ de multiplication par d'/d. Si M est sans torsion, toutes ces flèches sont des injections, et il est donc parfaitement clair que la limite inductive est non nulle (c'est simplement la réunion des $\frac{1}{d}M$). Même si M a de la torsion, un élément $x \in M$ sans torsion n'est tué par aucune des flèches $\natural_{dd'}$ donc n'est pas nul dans $\varinjlim M$.

Remarque sur la platitude : Dans chacune de ces quatre méthodes, au lieu de partir d'un élément $z \in M$ qui n'est pas de torsion pour montrer que $z \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est pas nul, on aurait pu partir d'un sous-module $M' \subseteq M$ et d'un élément $z \in M'$ tel que $z \otimes 1 \in M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est pas nul, pour montrer que $z \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est toujours pas nul : autrement dit, montrer que l'injection $M' \hookrightarrow M$ demeure une injection après tensorisation par $\mathbb{Q}$. Rien n'est changé à la substance des démonstrations. Ceci signifie, comme il a été signalé plus haut, que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est « plat ».

Généralisation(s) : Tout ce qui a été fait s'applique, *mutatis mutandis*, en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau intègre A quelconque et $\mathbb{Q}$ par le corps des fractions K de A : il reste vrai qu'un A-module M vérifie $M \otimes_A K = 0$ si et seulement si M est de torsion (ce qui se comprend, cette fois, comme signifiant que pour tout $x \in M$ il existe $a \in A \setminus \{0\}$ pour lequel $ax = 0$, et bien sûr plus comme « tout élément est d'ordre fini »), il reste vrai que $M \otimes_A K = (M/M_{\mathrm{tors}}) \otimes_A K$ se décrit comme l'ensemble des fractions formelles $\frac{x}{q}$ avec $x \in M$ et $q \in A \setminus \{0\}$, il reste vrai que le lemme de Zorn permet de construire une forme bilinéaire non nulle $M \times K \to K$ dès que M a un élément qui n'est pas de torsion, il reste vrai que K se décrit comme limite inductive de copies de A (indicées par tous les $d \in A \setminus \{0\}$) pour les flèches de multiplication par les $\frac{d'}{d}$, il reste vrai que K est plat sur A, etc.

On pourrait aussi considérer non plus $\mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$: dans ce cas, toujours les mêmes méthodes montrent que $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est encore plat sur $\mathbb{Z}$ et que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = 0$ si et seulement si M est de p-torsion, c'est-à-dire que pour tout $x \in M$ il existe un entier $r \geq 0$ tel que $p^r x = 0$.

Enfin, on pourrait considérer un groupe abélien L et se demander à quelle condition élémentaire il est plat sur $\mathbb{Z}$: il se trouve que c'est le cas si et seulement si L est sans torsion. Mais cette fois-ci il faut faire plus d'efforts pour le démontrer...