1. Soit k un corps, $L = k(X_1, \dots, X_n)$ le corps des fractions rationnelles en n indéterminées, et K le sous-corps de L engendré par k et les polynômes symétriques élémentaires.

(a) Montrer que l'extension $K \subseteq L$ est galoisienne, de groupe de Galois le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

(b) Si k est de caractéristique nulle, montrer que $X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n$ engendre L sur K.

(c) Soit $f \in L$ et H son stabilisateur dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'extension $K(f) \subseteq L$ est galoisienne de groupe de Galois H. (On pourra montrer que f est un élément primitif de l'extension $K \subseteq L^H$.)

2. (a) Soit K un corps, et p un nombre premier différent de la caractéristique de K. Montrer que si $a \in K$, $X^p - a$ est soit irréductible dans $K[X]$, soit possède une racine dans K.

(b) On désigne par $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels. On suppose que $X^p - a$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme$X^p - a$ est isomorphe au groupe des transformations de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la forme $y \mapsto ky + \ell$, où $k, \ell \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et k non nul.

3. Soit R un anneau intègre noethérien intégralement clos, et K son corps des fractions. Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne finie. On appelle G son groupe de Galois, et on désigne par $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ les éléments de G. On désigne par T l'ensemble des éléments de L qui sont entiers sur R. On se propose de montrer que T est un R-module de type fini.

(a) Montrer qu'il existe une base de L comme K-espace vectoriel qui est formée d'éléments entiers sur R.

(b) Soit $\{b_1, \dots, b_n\}$ une telle base. Soit $M \in M_n(L)$ la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) est : $\sigma_i(b_j)$. On pose $d = \det(M)$.

(i) Montrer que les coefficients de M sont dans T.

(ii) Montrer que d est non nul et que $d^2 \in K$.

(c) On se propose de montrer que $T \subseteq d^{-2}(Rb_1 + \cdots + Rb_n)$. Soit $b \in T$, que l'on écrit : $b = \sum c_i b_i, c_i \in K$ sur la base $\{b_1, \dots, b_n\}$.

(i) Montrer que pour tout i, $dc_i \in T$. (On pourra introduire le vecteur colonne c de i-ième coordonnée c_i et commencer par montrer que le vecteur Mc est à coordonnées dans T).

(ii) Montrer que $d^2 c_i \in T \cap K$, puis que $b \in d^{-2}(Rb_1 + \cdots + Rb_n)$.

(d) Conclure.

4. Soit K un corps algébriquement clos, et $X \subseteq K^n$ une variété algébrique affine. Une fonction $f \colon X \to K$ est dite régulière si pour tout point $p \in X$ il existe un voisinage U de p (pour la topologie de Zariski) sur lequel f s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynomiales : $f = h/k$, avec $h, k \in K[X_1, \dots, X_n]$, et k ne s'annulant pas sur U (h et k dépendent bien sûr du voisinage U choisi).

(a) (i) Montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini (U_i) de X, tel que sur chaque U_i, f s'écrit $f = h_i/k_i$, avec $h_i, k_i \in K[X_1, \dots, X_n]$, et k_i ne s'annulant pas sur U_i.

(ii) Montrer qu'on peut supposer que chaque U_i est le complémentaire dans X d'une hypersurface (on appellera F_i une équation de cette hypersurface).

(b) Montrer que f est une application polynomiale (on pourra s'intéresser à l'ensemble des zéros communs aux F_i, et en déduire une décomposition de f comme somme de polynômes).

5. Soient $n \geq 3$ et $I_2(n) \subseteq O_2(\mathbb{R})$ le groupe des isométries du polygone régulier à n côtés de $\mathbb{R}^2$, centré en 0.

(a) Montrer que $I_2(n)$ est fini d'ordre $2n$. Combien contient-il de réflexions ?

(b) On fait agir $I_2(n)$ naturellement sur l'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X, Y]$. Montrer que la sous-algèbre des invariants $\mathbb{R}[X, Y]^{I_2(n)} = \mathbb{R}[X^2 + Y^2, \prod_{i=1}^n L_i]$, où les L_i sont des éléments homogènes bien choisis.