1. Les questions suivantes sont indépendantes.

(a) Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et V_1 et V_2 des sous-espaces de V. Montrer que les algèbres extérieures satisfont à : $\wedge(V_1 \cap V_2) = \wedge(V_1) \cap \wedge(V_2)$.

(b) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie n et p un entier $0 \leq p \leq n$. Montrer que $\det(\wedge^p u) = (\det(u))^{C_{n-1}^{p-1}}$. (On pourra commencer par le cas où u est triangulaire supérieur dans une base convenable, puis utiliser un système de générateurs de $GL(V)$.)

2. (a) Soit K le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les racines du polynôme $X^3 - 2$. Montrer que l'extension $\mathbb{Q} \subseteq K$ est galoisienne et déterminer son groupe de Galois.

(b) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas combinaison linéaire à coefficients rationnels de racines de l'unité.

3. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers distincts.

(a) Montrer les deux propriétés :

(i) Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ est de degré 2^n sur $\mathbb{Q}$.

(ii) Un élément $x \in \mathbb{Q}$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ si et seulement si il existe une partie $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ telle que $x \prod_{i \in I} p_i$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

(On pourra procéder par récurrence sur n : montrer que (ii) se déduit de (i), et que l'assertion (i) au rang $n+1$ se déduit de (i) et (ii) au rang n.)

(b) Montrer que l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ est galoisienne et calculer son groupe de Galois.

4. Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois. On note $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.

(1) Soit $\theta \colon L \to L^n$ l'application définie par $\theta(b) = (\sigma_1(b), \ldots, \sigma_n(b))$. Montrer que l'image de θ engendre L^n comme L-espace vectoriel.

(2) Montrer qu'il existe des éléments a_i et b_i de L ($1 \leq i \leq n$) tels que : $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$ et $\sum_{i=1}^n a_i \sigma(b_i) = 0$ pour $\sigma \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$.

(3) Montrer que le polynôme

$$D(X_1, \ldots, X_n) = \det \left(\sum_{p=1}^{n} X_p \sigma_i^{-1}(\sigma_j(b_p)) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

n'est pas le polynôme nul.

(4) On suppose que K est un corps infini. Montrer qu'il existe $a \in L$ tel que les éléments $\sigma_i(a)$ ($1 \leq i \leq n$) forment une base du K-espace vectoriel L.