

Soit k un corps.

On appelle *degré pondéré* sur $k[x_1, \dots, x_n]$ défini par un n -uplet $(c_1, \dots, c_n)$ d'entiers strictement positifs la graduation de $k[x_1, \dots, x_n]$ qui associe à chaque indéterminée x_i le degré c_i (et donc à un monôme $x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}$ le degré $\sum_{i=1}^n c_i \ell_i$). Ceci généralise le degré (total) usuel qui correspond simplement au degré pondéré défini par le n -uplet $(1, \dots, 1)$. La notion de polynôme homogène (polynôme dont tous les monômes constitutants ont le même degré) s'applique également au degré pondéré.

Proposition : Fixons un degré pondéré défini par un n -uplet $(c_1, \dots, c_n)$. Si $y_1, \dots, y_n$ sont des éléments algébriquement indépendants de $k[x_1, \dots, x_n]$ homogènes de degrés $\deg(y_i) = c_i$ (au sens du degré pondéré) pour chaque i , alors $k[y_1, \dots, y_n] = k[x_1, \dots, x_n]$ (i.e., les y_i forment une base de $k[x_1, \dots, x_n]$ comme algèbre de polynômes au même titre que les x_i).

Démonstration. Notons $S = k[x_1, \dots, x_n]$ et $S' = k[y_1, \dots, y_n] \subseteq S$. Le k -espace vectoriel S_d des polynômes homogènes de degré (pondéré) d dans S admet pour base les monômes de degré d , il a donc pour dimension $\text{card}\{(\ell_1, \dots, \ell_n) : \sum_{i=1}^n c_i \ell_i = d\}$. Mais les hypothèses faites sur S' font qu'exactly le même raisonnement s'applique à S'_d (défini de façon analogue). Comme $S'_d \subseteq S_d$ et qu'il s'agit de deux k -espaces vectoriels de même dimension, on a donc $S'_d = S_d$ pour tout d , soit $S' = S$ (puisque $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$ et de façon analogue pour S'). ✓

Corollaire : Fixons un degré pondéré défini par un n -uplet $(c_1, \dots, c_n)$. Si $y_1, \dots, y_n$ sont des éléments algébriquement indépendants de $k[x_1, \dots, x_n]$ homogènes (au sens du degré pondéré) et tels que $\sum_{i=1}^n \deg(y_i) = \sum_{i=1}^n c_i$ (ou bien que $\prod_{i=1}^n \deg(y_i) = \prod_{i=1}^n c_i$) alors la conclusion de la proposition vaut encore.

Démonstration. Puisque les y_i sont algébriquement indépendants, r quelconque d'entre eux doivent faire intervenir au moins r des variables x_i (sans quoi ces r polynômes seraient algébriquement liés), ce qui permet d'affirmer qu'il existe une permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ telle que $x_{\sigma(i)}$ intervient (dans au moins un monôme) dans l'écriture de y_i , et quitte à réordonner on peut supposer $\sigma = \text{id}$. Alors y_i fait intervenir x_i donc $\deg(y_i) \geq \deg(x_i) = c_i$, et l'hypothèse d'égalité de la somme ou du produit permet de conclure $\deg(y_i) = c_i$ exactement, donc la proposition s'applique. ✓

Application : Soit G un sous-groupe fini de $O(V)$, où V est un espace euclidien de dimension n , et on suppose G engendré par des réflexions. Si $f_1, \dots, f_n$ sont n polynômes algébriquement indépendants, homogènes de degrés (au sens usuel) respectivement $d_1, \dots, d_n$, et si $\prod_{i=1}^n d_i = \text{card } G$ (ou bien si $\sum_{i=1}^n (d_i - 1) = N$ avec N le nombre de réflexions dans G), alors $\mathbb{R}[V]^G = \mathbb{R}[f_1, \dots, f_n]$.

Démonstration. Soit $h_1, \dots, h_n$ un ensemble basique d'invariants dans $\mathbb{R}[V]^G$, qui existe d'après le théorème de Chevalley (puisque G est supposé engendré par des réflexions) : les h_i sont homogènes et algébriquement indépendants, et $\mathbb{R}[V]^G = \mathbb{R}[h_1, \dots, h_n]$. Le degré (total) usuel sur $\mathbb{R}[V]$ fournit un degré pondéré sur $\mathbb{R}[h_1, \dots, h_n]$ en posant justement $c_i = \deg(h_i)$ (au sens du degré usuel). Les résultats sur les degrés d'un ensemble basique pour un groupe engendré par des réflexions montrent alors que $\sum_{i=1}^n (c_i - 1) = N$ et $\prod_{i=1}^n c_i = \text{card } G$: l'hypothèse faite sur les f_i permet donc précisément d'appliquer le corollaire précédent. ✓

Remarque : Il est bien sûr tout à fait possible d'avoir n éléments $y_1, \dots, y_n$ algébriquement indépendants et homogènes (pour un degré pondéré quelconque) de $k[x_1, \dots, x_n]$ tels que $k[y_1, \dots, y_n]$ soit strictement plus petit que $k[x_1, \dots, x_n]$. Le degré de transcendance montre seulement que $k(x_1, \dots, x_n)$ est algébrique sur $k(y_1, \dots, y_n)$, mais il n'est même pas vrai en général que $S = k[x_1, \dots, x_n]$ soit entier sur $S' = k[y_1, \dots, y_n]$ (prendre par exemple, pour $n = 2$ disons, $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_1 x_2$, alors $x_2 = y_2 / y_1$ n'est pas entier sur S' sans quoi, puisque S' est intégralement clos, il serait contenu dedans).