Les exercices de cette feuille se suivent logiquement. Toutes les représentations considérées ici seront des représentations de groupes finis sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes et seront de dimension finie.

1 (première formule de projection). (1) Soit W une représentation d'un groupe fini G : on notera W^G le sous-espace vectoriel des points de W fixes par (tous les éléments de) G, et χ_W le caractère de W, c'est-à-dire la fonction $G \to \mathbb{C}$ qui à $g \in G$ associe la trace de l'action de g sur W. Montrer que $\dim W^G = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \chi_W(g)$.

(2) En déduire que si U et V sont deux représentations *irréductibles* du même groupe fini G alors $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_U(g)}\, \chi_V(g)$ vaut 1 lorsque $U \cong V$ (en tant que représentations de G) et 0 sinon. (On rappelle pour cela le lemme de Schur : si U et V sont deux représentations irréductibles, alors $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U, V)$ est soit nul soit réduit aux multiples scalaires d'un isomorphisme entre U et V.)

(3) En déduire les faits suivants : que le caractère d'une représentation (irréductible ou non) détermine cette dernière, qu'une représentation V est irréductible si et seulement si on a $\sum_{g\in G} |\chi_V(g)|^2 = \operatorname{card} G$, et que le nombre de représentations irréductibles de G est au plus égal au nombre de classes de conjugaison de G (on va voir à l'exercice 3, qu'il y a égalité).

Corrigé. (1) Considérons l'application $\varphi \colon W \to W$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} g \cdot x$. Par définition de χ_W, la trace de φ est $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \chi_W(g)$. Mais φ est manifestement une projection de W sur son sous-espace W^G (son image tombe dans W^G, et si $x \in W^G$ on a $\varphi(x) = x$). Sa trace est donc la dimension de ce W^G.

(2) On peut considérer que $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) = U^\vee \otimes_{\mathbb{C}} V$ (où $U^\vee$ désigne le dual de U) des applications $\mathbb{C}$-linéaires de U vers V (en oubliant l'action de G), puis munir cet espace d'une action de G par $(g \cdot \psi)(x) = g \cdot (\psi(g^{-1} \cdot x))$ (pour $g \in G$, $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ et $x \in U$). Pour cette action, on a manifestement $(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V))^G = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U, V)$ (où $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U, V)$ désigne les morphismes — également appelés « opérateurs d'entrelacement » de la représentation U vers la représentation V). En vertu du lemme de Schur, $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V))^G$ vaut soit 1 soit 0 selon qu'il existe ou non un isomorphisme entre U et V (comme G-représentations), et la question (1) nous permet de conclure dès lors qu'on aura prouvé $\chi_W = \overline{\chi_U}\, \chi_V$, où χ_W est le caractère de $U^\vee \otimes_{\mathbb{C}} V$.

Pour voir ce dernier point, en appliquant la formule de la trace sur un produit tensoriel (i.e. $\operatorname{tr}(g \otimes h) = \operatorname{tr}(g)\ \operatorname{tr}(h)$), il suffit de voir que $\chi_{U^\vee} = \overline{\chi_U}$. Or manifestement, si $g \in G$, qui agit sur $U^\vee$ par $(g \cdot \lambda)(x) = \lambda(g^{-1} \cdot x)$, les valeurs propres de g agissant sur $U^\vee$ sont celles de g^{-1} agissant sur U, c'est-à-dire les inverses des valeurs propres de g agissant sur U, et comme ces valeurs propres sont des racines de l'unité (car tout élément de G a une certaine puissance qui vaut 1) ce sont aussi les conjuguées, d'où la formule recherchée.

(3) On sait (par complète réductibilité) que toute représentation V s'écrit $V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus a_r}$ où $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers naturels et $V_1, \ldots, V_r$ des représentations irréductibles (deux à deux non isomorphes) ; et on a $\chi_V = a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r$ où χ_V est le caractère de V et χ_i celui de V_i. Or d'après ce qu'on vient de voir, les χ_i sont une famille orthonormale pour le produit scalaire $(\alpha|\beta) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$ (sur les fonctions $G \to \mathbb{C}$), et en particulier ils sont linéairement indépendants, donc la donnée de χ_V détermine les a_i et, à partir de là, V. De plus, $\sum_{g\in G} |\chi_V(g)|^2 = \sum_{i=1}^r a_i^2$, cette somme valant 1 précisément si exactement un des a_i vaut 1 et les autres 0, c'est-à-dire précisément quand V est irréductible. Enfin, comme chaque caractère χ est constant sur les classes de conjugaison de G, i.e., $\chi(h^{-1}gh) = \chi(g)$ (par la formule analogue sur la trace), les caractères forment une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{C}$ constantes sur chaque classe de conjugaison, et la dimension de cet espace vectoriel est l'ensemble des classes de conjugaison de G. ✓

2 (la représentation régulière). On appelle *représentation régulière* d'un groupe fini G l'action de G sur l'algèbre de groupe $R = \mathbb{C}[G]$ elle-même, par multiplication à gauche. Quel est le caractère χ_R de cette représentation régulière ? Si $V_1, \ldots, V_r$ (deux à deux non isomorphes) sont toutes les représentations irréductibles de G, écrire explicitement R comme somme directe des V_i avec des multiplicités à déterminer. Montrer que $\sum_{i=1}^r (\dim V_i)^2 = \operatorname{card} G$.

Corrigé. Si $g = 1 \in G$, l'action de g sur toute représentation est l'identité, donc $\chi_R(1) = \dim R = \operatorname{card} G$. Mais si $g \neq 1 \in G$, l'action de g sur la base G de $\mathbb{C}[G]$ se fait par permutation et sans point fixe : la matrice représentant l'action de g sur $\mathbb{C}[G]$ est donc une matrice de permutation de diagonale nulle, et ceci prouve $\chi_R(g) = 0$.

À présent, écrivons $R \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus a_r}$, où $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers naturels (qui, *a priori*, peuvent être nuls), les $V_1, \ldots, V_r$ (deux à deux non isomorphes) étant toutes les représentations irréductibles de G. Alors $\chi_R = a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r$ (où χ_i désigne le caractère de V_i). En utilisant le produit scalaire $(\alpha|\beta) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$ et le résultat de l'exercice 1 (2), on voit que $a_i = (\chi_R|\chi_i) = \chi_i(1) = \dim V_i$ pour chaque i. C'est-à-dire que chaque représentation irréductible apparaît comme facteur de la représentation régulière avec pour multiplicité sa propre dimension. En particulier, on a $\operatorname{card} G = \dim R = \sum_{i=1}^r (\dim V_i)^2$, comme annoncé. ✓

3 (seconde formule de projection). Soit $\alpha\colon G \to \mathbb{C}$ (où G est un groupe fini) une fonction constante sur chaque classe de conjugaison de G. On pose $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \alpha(g)\, g \in \mathbb{C}[G]$. Montrer que ε_α est central dans $\mathbb{C}[G]$ (c'est-à-dire que $\varepsilon_\alpha h = h\varepsilon_\alpha$ pour tout $h \in \mathbb{C}[G]$). Montrer que ε_α agit comme une homothétie sur toute représentation irréductible V de G.

En déduire que toute fonction α constante sur chaque classe de conjugaison de G est combinaison linéaire des caractères des représentations irréductibles de G, et notamment que le nombre de représentations irréductibles de G (deux-à-deux non isomorphes) est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

Corrigé. Pour montrer que ε_α est central dans $\mathbb{C}[G]$, il suffit de montrer $\varepsilon_\alpha h = h\varepsilon_\alpha$ pour tout $h \in G$, le cas d'un $h \in \mathbb{C}[G]$ s'en déduisant par combinaison $\mathbb{C}$-linéaire. Or on a $\varepsilon_\alpha h = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \alpha(g)\, gh = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \alpha(hgh^{-1})\, (hgh^{-1})h = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \alpha(g)\, hg = h\varepsilon_\alpha$.

Si V est une représentation irréductible de G, l'action de $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{C}[G]$ sur V commute, on vient de le voir, à celle de tout élément $h \in G$, autrement dit, définit un morphisme de G-représentations $V \to V$. Mais le lemme de Schur (rappelé dans l'énoncé de l'exercice 1) implique qu'il s'agit d'une homothétie (un multiple scalaire de l'identité).

Soit maintenant α une fonction complexe constante sur chaque classe de conjugaison de G. En utilisant le produit scalaire $(\alpha|\beta) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$ et en remplaçant α par $\alpha - \sum_{i=1}^r (\chi_i|\alpha)$ où les χ_i sont les caractères des représentations irréductibles V_i (pour $i = 1, \ldots, r$) deux à deux non isomorphes de G, comme on a vu précédemment que les χ_i sont une famille orthonormale, on peut supposer que $(\alpha|\chi_i) = 0$ pour chaque i, et il s'agit de prouver que $\alpha = 0$. Formons ε_α comme on l'a vu : pour toute représentation irréductible V, comme ε_α agit comme une homothétie sur V, c'est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V}\chi_V(\varepsilon_\alpha)$. Mais $\chi_V(\varepsilon_\alpha) = (\chi_{V^\vee}, \alpha)$ (puisque $\chi_{V^\vee} = \overline{\chi_V}$), et ceci est nul (en effet $V^\vee$ est aussi une représentation irréductible si V l'est). C'est donc que ε_α agit trivialement sur toute représentation irréductible, donc sur toute représentation (par complète réductibilité), et notamment sur la représentation régulière R (cf. exercice 2) : c'est donc que $\varepsilon_\alpha = 0$ (dans $\mathbb{C}[G]$), et ceci implique $\alpha = 0$. On a bien prouvé que toute fonction comple constante sur chaque classe de conjugaison de G est combinaison linéaire des χ_i. Comme par ailleurs les χ_i sont linéairement indépendants (par l'exercice 1), ils sont une base de l'espace des telles fonctions α, et leur nombre r est précisément la dimension de cet espace, soit le cardinal de l'ensemble des classes de conjugaison de G. Insistons : les caractères χ_i des représentations sont une base orthonormale, pour le produit scalaire $(\bullet|\bullet)$, de l'ensemble des fonctions complexes sur G constantes sur chaque classe de conjugaison de G. ✓

4 (groupe diédral). Déterminer les représentations irréductibles du groupe diédral du n-gone (D_n a $2n$ éléments, $1, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}$ avec les relations $r^n = r^2 = srsr = 1$). On distinguera pour cela le cas $n = 2m$ et le cas $n = 2m + 1$.

Corrigé. Commençons par le cas $n = 2m + 1$. Majorons tout d'abord le nombre de classes de conjugaison d'éléments de D_n : puisque $s^{-1}r^i s = r^{-i}$, les éléments r^i et r^{-i} sont dans la même classe, et puisque $r^{-j}sr^ir^j = sr^{i+2j}$, tous les sr^i sont dans la même classe. On a donc au plus $m + 2$ classes de conjugaison, et si on trouve $m + 2$ représentations irréductibles dont les caractères sont deux à deux distincts on aura prouvé que ce sont toutes les représentations irréductibles (et qu'il y a exactement $m + 2$ classes de conjugaison). Or on a deux représentations évidentes abéliennes, c'est-à-dire de dimension 1 (nécessairement irréductibles) : la représentation triviale (chaque élément de D_n agit comme l'identité) et la représentation « alternée » qui fait agir chaque r^i par $+1$ et chaque sr^i par -1. De plus, si ω est une racine $(2m + 1)$-ième de l'unité, différente de 1 (mais non nécessairement primitive), on a la représentation V_ω, de dimension 2, sur laquelle r agit par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ et s par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette dernière représentation est irréductible d'après le critère vu à l'exercice 1 (3) : dès que $\omega \neq 1$ on a $\sum_{i=0}^{2m}(\omega^i + \omega^{-i})^2 = 4m + 2 = \operatorname{card} D_n$ en développant. Ceci fournit m nouvelles représentations irréductibles non isomorphes (il y a m paires $\{\omega, \omega^{-1}\}$ de racines $(2m + 1)$-ièmes de l'unité différentes de 1). On a ainsi trouvé les $m + 2$ représentations irréductibles recherchées. On vérifie la formule donnée à la fin de l'exercice 2 : $4m + 2$ est bien le cardinal de D_n.

Passons maintenant au cas $n = 2m$. On a toujours la représentation triviale de dimension 1 (chaque élément de D_n agit comme l'identité) et la représentation « alternée » de dimension 1 qui fait agir chaque r^i par $+1$ et chaque sr^i par -1. Et si ω est une racine $2m$-ième de l'unité différente de 1 et de -1, on a toujours la représentation V_ω de dimension 2, sur laquelle r agit par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ et s par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'irréductibilité de V_ω vaut encore, pour les mêmes raisons. On a de plus deux nouvelles représentations de dimension 1 : celle sur laquelle les r^i ou sr^i avec i pairs agissent comme $+1$ et les r^i ou sr^i avec i impair comme -1, et celle (tensorisée de la précédente par la représentation alternée) sur laquelle les r^i avec i pair et les sr^i avec i impair agissent comme $+1$ et les r^i avec i impair et les sr^i avec i pair agissent comme -1. En tout, on a trouvé $m + 3$ représentations irréductibles (dont 4 de dimension 1 et $m - 1$ de dimension 2). Quant aux classes de conjugaison, pour les mêmes raisons que précédemment, r^i et r^{-i} sont dans la même classe, et sr^i sont dans une même classe pour tous les i pairs d'une part et tous les i impairs de l'autre : ceci fait au plus $m + 3$ classes de conjugaison, donc on a bien trouvé toutes les représentations irréductibles. On vérifie de nouveau : $4(m-1)+4 = 4m$ est bien le cardinal de D_n. ✓

5 ($\mathfrak{S}_4$). Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ sur quatre objets. Dresser la table des caractères. Puis calculer chaque produit tensoriel possible de deux telles représentations (i.e., sa décomposition en somme de représentations irréductibles).

Corrigé. Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ sont connues : elles sont en bijection canonique avec les partitions de 4 (soit 4, $3{+}1$, $2{+}2$, $2{+}1{+}1$ et $1{+}1{+}1{+}1$), la correspondance étant donnée par la longueur des orbites pour l'action standard ; autrement dit, on cherche à trouver cinq représentations irréductibles deux à deux non isomorphes, et on les aura toutes. Pour évaluer le produit scalaire, il faut noter le nombre d'éléments de chaque classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$: à part l'identité, il y a 6 transpositions, 3 produits de deux transpositions disjointes, 8 tricycles et 6 cycles de longueur 4 (et on vérifie $1+6+3+8+6=24=\operatorname{card}\mathfrak{S}_4$).

On a au moins la représentation triviale U de dimension 1 (sur laquelle tout élément de $\mathfrak{S}_4$ agit trivialement), et la représentation « alternée » U' — également de dimension 1 — sur laquelle chaque élément agit par sa signature.

On a ensuite la représentation « standard » V, de dimension 3 : elle consiste à faire agir $\mathfrak{S}_4$ par permutation sur les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de l'hyperplan $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ dans $\mathbb{C}^4$: son caractère vaut donc 3 sur l'identité, 1 sur une transposition, -1 sur le produit de deux transpositions disjointes, 0 sur un tricycle et -1 sur un cycle de longueur 4. Comme $3^2+6\times 1^2+3\times(-1)^2+8\times 0^2+6\times(-1)^2=24$, cette représentation est irréductible. De même, on voit que la représentation $V'=V\otimes_{\mathbb{C}}U'$ produit tensoriel de la représentation standard par la représentation alternée est irréductible (et différente de V').

On peut trouver le caractère de la dernière représentation W en utilisant les relations d'orthonormalité sur les lignes et les colonnes de la matrice des caractères. On peut aussi la décrire explicitement : le groupe $\mathfrak{S}_4$ admet pour sous-groupe distingué le sous-groupe $\mathfrak{V}$ d'indice 6 formé de l'identité et des trois produits de deux transpositions disjointes. Le quotient $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{V}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$: la représentation standard, de dimension 2, de $\mathfrak{S}_3$ (qui est définie de façon exactement analogue à celle de $\mathfrak{S}_4$, ou bien peut se voir comme V_ω (cf. exercice 4), avec ω racine primitive cubique de l'unité), définit donc une représentation sur $\mathfrak{S}_4$ (sur laquelle $\mathfrak{V}$ agit trivialement). Le caractère de W vaut donc 2 sur l'identité, 0 sur une transposition, 2 sur le produit de deux transpositions disjointes, -1 sur un tricycle et 0 sur un cycle de longueur 4.

Finalement, la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ est la suivante :

		(1) identité	(6) transp.	(3) deux trsp.	(8) tricycle	(6) 4-cycle
[1]	U	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
[1]	U'	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1
[3]	V	$+3$	$+1$	-1	0	-1
[3]	V'	$+3$	-1	-1	0	$+1$
[2]	W	$+2$	0	$+2$	-1	0

— et on peut en vérifier l'orthonormalité des lignes et des colonnes.

Pour décomposer les produits tensoriels, il suffit de remarquer que le caractère du produit tensoriel de deux représentations est (d'après la formule donnant la trace du produit tensoriel de deux endomorphismes) le produit des caractères, et il suffit pour décomposer dans la base des caractères des représentations irréductibles d'évaluer le produit scalaire avec chacun de ces caractères. Finalement on obtient la table suivante pour les produits tensoriels :

U	U'	V	V'	W
U'	U	V'	V	W
V	V'	$U\oplus V\oplus V'\oplus W$	$U'\oplus V\oplus V'\oplus W$	$V\oplus V'$
V'	V	$U'\oplus V\oplus V'\oplus W$	$U\oplus V\oplus V'\oplus W$	$V\oplus V'$
W	W	$V\oplus V'$	$V\oplus V'$	$U\oplus U'\oplus W$

— ce qui permet de calculer le produit tensoriel de deux représentations quelconques. ✓