Les exercices de cette feuille se suivent logiquement. Toutes les représentations considérées ici seront des représentations de groupes finis sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes et seront de dimension finie.

1 (première formule de projection). (1) Soit W une représentation d'un groupe fini G : on notera W^G le sous-espace vectoriel des points de W fixes par (tous les éléments de) G, et χ_W le caractère de W, c'est-à-dire la fonction $G \to \mathbb{C}$ qui à $g \in G$ associe la trace de l'action de g sur W. Montrer que $\dim W^G = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \chi_W(g)$.

(2) En déduire que si U et V sont deux représentations *irréductibles* du même groupe fini G alors $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_U(g)}\, \chi_V(g)$ vaut 1 lorsque $U \cong V$ (en tant que représentations de G) et 0 sinon. (On rappelle pour cela le lemme de Schur : si U et V sont deux représentations irréductibles, alors $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U, V)$ est soit nul soit réduit aux multiples scalaires d'un isomorphisme entre U et V.)

(3) En déduire les faits suivants : que le caractère d'une représentation (irréductible ou non) détermine cette dernière, qu'une représentation V est irréductible si et seulement si on a $\sum_{g\in G} |\chi_V(g)|^2 = \operatorname{card} G$, et que le nombre de représentations irréductibles de G est au plus égal au nombre de classes de conjugaison de G (on va voir à l'exercice 3, qu'il y a égalité).

2 (la représentation régulière). On appelle *représentation régulière* d'un groupe fini G l'action de G sur l'algèbre de groupe $R = \mathbb{C}[G]$ elle-même, par multiplication à gauche. Quel est le caractère χ_R de cette représentation régulière ? Si $V_1, \ldots, V_r$ (deux à deux non isomorphes) sont toutes les représentations irréductibles de G, écrire explicitement R comme somme directe des V_i avec des multiplicités à déterminer. Montrer que $\sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2 = \operatorname{card} G$.

3 (seconde formule de projection). Soit $\alpha\colon G \to \mathbb{C}$ (où G est un groupe fini) une fonction constante sur chaque classe de conjugaison de G. On pose $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \alpha(g)\, g \in \mathbb{C}[G]$. Montrer que ε_α est central dans $\mathbb{C}[G]$ (c'est-à-dire que $\varepsilon_\alpha h = h \varepsilon_\alpha$ pour tout $h \in \mathbb{C}[G]$). Montrer que ε_α agit comme une homothétie sur toute représentation irréductible V de G.

En déduire que toute fonction α constante sur chaque classe de conjugaison de G est combinaison linéaire des caractères des représentations irréductibles de G, et notamment que le nombre de représentations irréductibles de G (deux-à-deux non isomorphes) est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

4 (groupe diédral). Déterminer les représentations irréductibles du groupe diédral du n-gone (D_n a $2n$ éléments, $1, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}$ avec les relations $r^n = r^2 = srsr = 1$). On distinguera pour cela le cas $n = 2m$ et le cas $n = 2m + 1$.

5 ($\mathfrak{S}_4$). Déterminer toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ sur quatre objets. Dresser la table des caractères. Puis calculer chaque produit tensoriel possible de deux telles représentations (i.e., sa décomposition en somme de représentations irréductibles).