

1. Soit Q le groupe des quaternions, i.e., le groupe ayant huit éléments $1, s_i, s_j, s_k, t, ts_i, ts_j, ts_k$, où t est central, $t^2 = 1$, et $s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = s_i s_j s_k = t$. On appelle $\mathbb{R}[Q]$ l'algèbre de groupe sur Q à coefficients dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les combinaisons $\mathbb{R}$ -linéaire formelles d'éléments de Q , la multiplication provenant de celle sur Q). On rappelle qu'une représentation de Q signifie la même chose qu'une représentation de $\mathbb{R}[Q]$ (un $\mathbb{R}[Q]$ -module à gauche).

Déterminer quatre représentations de Q de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que le plongement évident (soit $t \mapsto -1$, $s_i \mapsto i$, $s_j \mapsto j$ et $s_k \mapsto k$) de Q dans l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions réels (voir exercice 3 de la feuille n°2) définit une représentation irréductible (= simple) de Q de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. En déduire une écriture explicite de la $\mathbb{R}$ -algèbre (semisimple) $\mathbb{R}[Q]$ comme produit d'algèbres simples.

En déduire une écriture de $\mathbb{C}[Q]$ comme produit d'algèbres de matrices (on rappelle que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, cf. *loc. cit.*). Quelles sont les représentations irréductibles complexes de Q ?

Corrigé. On dispose tout d'abord de la représentation triviale U , autrement dit l'action de Q sur $\mathbb{R}$ par l'identité. Par ailleurs, le groupe Q admet trois sous-groupes (distingués) d'indice 2, à savoir $H_i = \{1, s_i, t, ts_i\}$, $H_j = \{1, s_j, t, ts_j\}$ et $H_k = \{1, s_k, t, ts_k\}$, ses quotients par lesquels sont d'ordre 2 : à partir de la représentation V du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ dans laquelle l'unique élément s non trivial agit comme $x \mapsto -x$, on obtient trois représentations V_i, V_j et V_k de dimension 1 de Q (ainsi, sur V_i , les éléments $1, s_i, t, ts_i$ agissent comme l'identité tandis que s_j, s_k, ts_j, ts_k agissent comme $x \mapsto -x$).

Le plongement de Q dans le groupe $\mathbb{H}^\times$ des quaternions non nuls donné par $t \mapsto -1$, $s_i \mapsto i$, $s_j \mapsto j$ et $s_k \mapsto k$ fait de $W = \mathbb{H}$ une représentation de dimension 4 de Q . Cette représentation est irréductible : en effet, un sous-espace de $W = \mathbb{H}$ qui serait laissé stable par Q serait stable par multiplication par tout élément de $\mathbb{H}$ (puisque i, j, k l'engendrent comme algèbre), mais comme $\mathbb{H}$ est une algèbre à division (pour tout $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ il existe $q' \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tel que $qq' = 1$), ce sous-espace est nécessairement soit 0 soit W tout entier.

On a donc déterminé un morphisme φ de $\mathbb{R}[Q]$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$, envoyant un élément $a \in \mathbb{R}[Q]$ sur son action sur les représentations U, V_i, V_j, V_k et W respectivement (la première composante envoie chaque élément de Q sur 1, la seconde envoie $1, t, s_i, ts_i$ sur 1 et s_j, s_k, ts_j, ts_k sur -1 , la troisième et la quatrième sont analogues, et la dernière envoie 1 sur 1, t sur -1 , s_i sur i , s_j sur j et s_k sur k).

Le plus facile est de vérifier directement la surjectivité de φ : l'élément $\frac{1}{8}(1 + s_i + s_j + s_k + t + ts_i + ts_j + ts_k)$ a pour image $(1, 0, 0, 0, 0)$, l'élément $\frac{1}{8}(1 + s_i - s_j - s_k + t + ts_i - ts_j - ts_k)$ a pour image $(0, 1, 0, 0, 0)$, l'élément $\frac{1}{2}(1 - t)$ a pour image $(0, 0, 0, 0, 1)$ et l'élément $\frac{1}{2}(s_i - ts_i)$ a pour image $(0, 0, 0, 0, i)$, tout ceci (ainsi que les éléments analogues pour j et k au lieu de i) attestant de la surjectivité de φ .

L'injectivité de φ résulte de sa surjectivité par égalité des dimensions. On a donc $\mathbb{R}[Q] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$.

On peut également préférer justifier la bijectivité de φ par un raisonnement plus abstrait¹ : l'algèbre semisimple $A = \mathbb{R}[Q]$ est le produit de ses composantes simples B_λ , à chacune desquelles correspond une représentation irréductible V_λ de A pour laquelle B_λ est l'image de A dans $\text{End}_k(V_\lambda)$. Ici, en prenant pour V_λ les représentations irréductibles qu'on a trouvées, A se surjecte bien sur le produit des B_λ (qui sont respectivement quatre fois $\mathbb{R}$ et une fois $\mathbb{H}$).

Comme manifestement $\mathbb{C}[Q] \cong \mathbb{R}[Q] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on peut en déduire $\mathbb{C}[Q] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ où la dernière composante de l'isomorphisme $\varphi_{\mathbb{C}}$ en question envoie $1, s_i, s_j, s_k$,

⁽¹⁾ Noter cependant qu'on utilise ici la théorie des algèbres semisimples sur un corps, à savoir $\mathbb{R}$, qui n'est pas algébriquement clos : une $\mathbb{R}$ -algèbre (de dimension finie) simple est un anneau de matrices sur une algèbre à divisions sur $\mathbb{R}$, laquelle peut être $\mathbb{R}$ lui-même ou bien $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

t, ts_i, ts_j, ts_k respectivement sur les matrices $1, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, -1, -\sigma_i, -\sigma_j, -\sigma_k$ où on a posé $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Pour ce qui est des représentations complexes de Q , on a les représentations $U_{\mathbb{C}}$ (triviale), $V_{i,\mathbb{C}}$, $V_{j,\mathbb{C}}$ et $V_{k,\mathbb{C}}$ obtenues par tensorisation de U , V_i , V_j et V_k respectivement avec $\mathbb{C}$ (et exactement analogues), et une représentation $\tilde{W}$ de dimension 2 donnée par les matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ définies ci-dessus : la représentation réelle irréductible W , complexifiée en $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, devient réductible comme $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \tilde{W} \oplus \tilde{W}$, l'isomorphisme envoyant $1 \in \mathbb{H}$ sur le couple des deux vecteurs colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\tilde{W} \oplus \tilde{W}$. ✓

2. Soit C_n le groupe cyclique d'ordre n . Montrer que pour tout corps k on a $k[C_n] \cong k[t]/(t^n - 1)$: en particulier, que vaut $\mathbb{C}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{C}$? et que vaut $\mathbb{Q}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{Q}$?

Corrigé. Soit σ un générateur de C_n . Le morphisme $\psi: k[t] \rightarrow k[C_n]$ envoyant t sur σ (ce qui le définit uniquement) passe au quotient à $k[t]/(t^n - 1)$ puisque $\sigma^n = 1$ dans C_n (donc dans $k[C_n]$). Le morphisme $\bar{\psi}: k[t]/(t^n - 1) \rightarrow k[C_n]$ ainsi défini est bijectif car il envoie la k -base de $k[t]/(t^n - 1)$ formée des classes des t^k pour $0 \leq k < n$ sur la k -base de $k[C_n]$ formée des σ^k .

Lorsque $k = \mathbb{C}$ (ou du moins contient une racine primitive n -ième de l'unité, sous-entendu n non multiple de la caractéristique de k) alors $t^n - 1$ se factorise comme $\prod_{\ell=0}^{n-1} (t - \zeta^\ell)$ avec $\zeta = e^{2i\pi/n}$ racine primitive n -ième de l'unité, et alors $\mathbb{C}[C_n] \cong \mathbb{C}[t]/(t^n - 1) \cong \prod_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{C}$ où l'isomorphisme $\mathbb{C}[t]/(t^n - 1) \cong \prod_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{C}$ (résultant du théorème chinois, si l'on veut) envoie t sur la famille des $(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$. Autrement dit, les représentations de C_n sur $\mathbb{C}$ sont les V_ℓ , toutes de dimension 1, où σ agit sur V_ℓ par multiplication par ζ^ℓ (remarquer que V_0 est la représentation triviale).

Lorsque $k = \mathbb{Q}$, alors $t^n - 1$ se factorise comme $\prod_{d|n} \Phi_d(t)$ avec Φ_d le d -ième polynôme cyclotomique, et alors $\mathbb{Q}[C_n] \cong \mathbb{Q}[t]/(t^n - 1) \cong \prod_{d|n} \mathbb{Q}[\zeta_d]$ où $\mathbb{Q}[\zeta_d]$ est l'extension de corps de degré d de $\mathbb{Q}$ obtenue en y rajoutant une racine primitive d -ième de l'unité, ζ_d . Autrement dit, les représentations de C_n sur $\mathbb{Q}$ sont les U_d , de dimension $\varphi(d)$, où U_d est le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q}[\zeta_d]$ sur lequel σ agit par multiplication par ζ_d . ✓

3 (lemme de la trace). Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe opérant fidèlement et $\mathbb{C}$ -linéairement sur V de sorte que la représentation V de G soit irréductible. On suppose que le caractère $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$, (c'est-à-dire la fonction associant à un $g \in G$ la trace de l'action $\rho(g)$ de g sur V) a une image finie de cardinal r . Montrer alors que $\text{card } G \leq r^{n^2}$. Pour cela, on montrera (en utilisant un résultat de Burnside) qu'il existe n^2 éléments $g_1, \dots, g_{n^2}$ de G qui (c'est-à-dire dont les images par $\rho: G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$) forment une $\mathbb{C}$ -base de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, puis on montrera que les traces des hg_i , pour $h \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, déterminent h .

Application (problème de Burnside pour les groupes linéaires) : Supposons que G soit un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $g^N = 1$ pour tout $g \in G$ (l'exposant de G divise N) : montrer qu'alors $\text{card } G \leq N^{n^3}$, d'abord en supposant que $\mathbb{C}^n$ est une représentation irréductible de G , puis sans cette hypothèse (en procédant par récurrence sur la dimension, en décomposant explicitement l'action de G).

Corrigé. D'après un résultat de Burnside, puisque V est une représentation irréductible (sur un corps algébriquement clos, en l'occurrence $\mathbb{C}$), l'application $\mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est surjective. Il s'ensuit qu'il existe n^2 éléments $g_1, \dots, g_{n^2}$ de G dont les images dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong$

$M_n(\mathbb{C})$ forment une base de celui-ci. Regardons à présent l'application $\mathbb{C}$ -linéaire $\varepsilon: \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ qui envoie $h \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ sur l'ensemble des traces $\text{tr}(h\rho(g_i))$ des (actions de) hg_i sur V . Si on a $\varepsilon(h) = 0$ alors $\text{tr}(h\rho(g_i)) = 0$ pour tout i , donc $\text{tr}(h\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$, et en prenant pour γ les différents éléments de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$, on voit que $h = 0$. Ceci prouve l'injectivité de ε . Mais alors G a un cardinal borné par son image par $\varepsilon \circ \rho$, soit au plus r^{n^2} (puisque chaque coordonnée de ε prend au plus r valeurs), comme annoncé.

Soit maintenant G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $g^N = 1$ pour tout $g \in G$. Dans un premier temps, supposons que $\mathbb{C}^n$ est irréductible sous G . Les valeurs propres d'un élément $g \in G$ sont toutes des racines N -ièmes de l'unité, dont la trace de g , qui est somme de n telles valeurs, peut prendre au plus N^n valeurs distinctes. Le résultat précédent montre alors que $\text{card } G \leq (N^n)^{n^2} = N^{n^3}$.

À présent, supposons que $V = \mathbb{C}^n$ soit réductible en $V_1 \oplus V_2$ avec V_i de dimension $n_i > 0$ sur $\mathbb{C}$. En prenant une base de V adaptée à cette décomposition, un élément $g \in G$ s'écrit $\begin{pmatrix} g_1 & h \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ avec $g_1 \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_1) \cong M_{n_1}(\mathbb{C})$ et $g_2 \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_2) \cong M_{n_2}(\mathbb{C})$. Soit G_1 (resp. G_2) l'ensemble des g_1 (resp. g_2) pour g parcourant G : manifestement il est bien un sous-groupe de $GL_{n_1}(\mathbb{C})$ (resp. $GL_{n_2}(\mathbb{C})$), d'exposant divisant N , donc une récurrence permet de supposer $\text{card } G_i \leq N^{n_i^3}$. Mais le morphisme $G \rightarrow G_1 \times G_2$ est injectif : car si g est dans le noyau, l'hypothèse $g^N = 1$ donne immédiatement $Nh = 0$ donc $h = 0$ (le corps de base est de caractéristique zéro). Notamment, g_1 et g_2 déterminent g . Et alors $\text{card } G \leq N^{n_1^3 + n_2^3} \leq N^{n^3}$, ce qui termine la démonstration. ✓

4 (radical de Jacobson). Soit A un anneau (associatif mais non nécessairement commutatif). On rappelle qu'un A -module à gauche (parfois dit « représentation » de A , mais on préfère garder ce terme pour le cas où A est une algèbre sur un corps k , ce que, d'ailleurs, on pourra éventuellement supposer) est un groupe abélien M muni d'un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$: naturellement, A lui-même est un A -module à gauche de façon évidente, et un sous- A -module de celui-ci (c'est-à-dire un sous-groupe additif de A stable par multiplication à gauche par A) sera appelé *idéal à gauche* de A . Un idéal à gauche est dit *maximal* lorsqu'il est strictement contenu dans A et maximal pour l'inclusion parmi les idéaux à gauche strictement contenus dans A . On dit par ailleurs qu'un A -module à gauche non nul est *simple* (ou *irréductible*) lorsque tout sous- A -module strict de celui-ci est nul.

Pour un élément $x \in A$ donné, montrer l'équivalence entre les affirmations suivantes : (i) x appartient à tous les idéaux à gauche maximaux de A , (ii) pour tout $a \in A$ l'élément $1 + ax$ est inversible à gauche dans A , et (iii) $xM = 0$ pour tout A -module à gauche simple M . En déduire que l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A est un idéal à droite (donc bilatère) de A , et que c'est l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A (pour cela, on pourra trouver une condition semblable à (ii) mais symétrique entre droite et gauche).

Cette intersection commune aux idéaux à gauche maximaux de A et aux idéaux à droite maximaux de A sera appelée *radical de Jacobson* de A et notée $\text{rad } A$.

Corrigé. Montrons que (i) implique (ii) : soit x contenu dans tous les idéaux à gauche maximaux de A ; si $a \in A$ et $1 + ax$ n'est pas inversible à gauche, alors $1 + ax$ engendre un idéal à gauche strict de A qui est donc contenu dans un idéal à gauche maximal $\mathfrak{m}$. Mais alors $x \in \mathfrak{m}$ donc $ax \in \mathfrak{m}$ donc $1 \in \mathfrak{m}$, une contradiction. Montrons maintenant que (ii) implique (iii) : soit x tel que $1 + ax$ soit inversible à gauche pour tout $a \in A$, et supposons $xv \neq 0$ pour un certain $v \in M$ avec M un A -module à gauche simple. Alors $A \cdot xv \neq 0$ donc $A \cdot xv = M$ (par simplicité) donc il existe $a \in A$ tel que $-axv = v$, et alors $(1 + ax)v = 0$ donc $v = 0$, une contradiction. Montrons enfin que (iii) implique (i) : soit x tel que $xM = 0$ pour tout A -module

à gauche simple ; mais si $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche maximal de A alors $A/\mathfrak{m}$ est un A -module à gauche simple, donc on doit avoir $x(A/\mathfrak{m}) = 0$, donc $x \in \mathfrak{m}$. Ceci prouve l'équivalence souhaitée.

Montrons à présent que la condition (iii) est stable par multiplication à droite : or si $xM = 0$, pour M un A -module à gauche simple, et si $b \in A$ alors $xbM \subseteq xM = 0$. Grâce à l'équivalence entre (i) et (iii), on voit que l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A est bien un idéal à droite. À présent, montrons que (ii) est encore équivalent à l'affirmation (ii bis) : pour tous $a, b \in A$, l'élément $1 + axb$ est inversible (est une unité de A). Il est évident que (ii bis) implique (ii). Pour ce qui est de la réciproque, supposons que x vérifie (i)–(iii) : alors on vient de voir que xb les vérifie encore, donc $1 + axb$ est inversible à gauche ; mais si $u(1 + axb) = 1$, on a $u = 1 - uaxb$ donc (d'après le raisonnement qu'on vient de faire) u est lui-même inversible à gauche, donc u est une unité, donc $1 + axb$ en est une (et est son inverse). Comme la condition (ii bis) est symétrique, on a prouvé que l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A était aussi l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A . ✓

5 (semisimplicité). Cet exercice fait suite à l'exercice 4. Soit k un corps et A une k -algèbre (associative mais non nécessairement commutative) qu'on supposera tout du long être de dimension finie sur k ainsi que tous les modules qui vont intervenir. On dit que A est *semisimple* (a priori « à gauche », mais en fait cette condition est symétrique comme on va le voir) lorsque tout sous- A -module à gauche N d'un A -module à gauche M admet un supplémentaire (i.e., on peut écrire $M = N \oplus N'$ pour un certain sous- A -module à gauche N' de M). Montrer que A est semisimple si et seulement si A , vu comme A -module à gauche de la façon naturelle, est somme de A -modules à gauche simples (qui sont donc des idéaux à gauche non nuls minimaux pour l'inclusion).

On suppose que le radical de Jacobson de A est nul : montrer que pour une certaine famille finie $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ d'idéaux à gauche maximaux de A la flèche naturelle $A \rightarrow \bigoplus_i (A/\mathfrak{m}_i)$ est injective. En déduire que A est semisimple.

Réciproquement, si A est semisimple, montrer que son radical de Jacobson est nul (on pourra écrire un supplémentaire du radical).

Corrigé. Si A est semisimple, et si M est un A -module à gauche quelconque, soit M est simple, soit il a un sous-module N non nul et différent de M , qui admet alors un supplémentaire N' vérifiant les mêmes conditions. En répétant l'opération, on voit que, à condition que M soit de k -dimension finie, par exemple (ce qui assure que le processus doit terminer), M est somme directe de modules simples. Ceci s'applique en particulier à A lui-même, donc A est somme directe d'un nombre fini de sous- A -modules à gauche simples (autrement dit, d'idéaux à gauche non nuls minimaux pour l'inclusion).

Réciproquement, supposons qu'on ait une écriture $A = \sum_i \mathfrak{B}_i$ où les $\mathfrak{B}_i$ sont des idéaux à gauche de A simples comme A -modules à gauche. Alors, si v est un élément quelconque d'un A -module à gauche, on a $Av = \sum_i \mathfrak{B}_i v$ où les $\mathfrak{B}_i v$ sont manifestement des A -modules à gauche simples. Par conséquent, Av , et donc n'importe quel A -module à gauche M , est somme de A -modules à gauche simples. Supposons maintenant que $M = \sum_i M_i$ avec M_i des sous- A -modules à gauche simples de M et soit N un sous- A -module à gauche de M : on cherche à trouver un supplémentaire de N dans M . Pour cela, soit S un ensemble de i tels que la somme $N' = \sum_{i \in S} M_i$ soit *directe* et soit en somme directe avec N dans M . Alors $N \oplus N'$ doit être égal à M : en effet, s'il ne contenait pas un des M_i , son intersection avec lui serait nulle (par simplicité) donc on pourrait rajouter M_i à S , contredisant la maximalité de ce dernier.

Supposons maintenant que le radical de Jacobson de A est nul et montrons l'affirmation concernant l'injectivité de $A \rightarrow \bigoplus_i (A/\mathfrak{m}_i)$. Comme l'intersection de tous les $\mathfrak{m}$ (idéaux à

gauche maximaux de A) est nulle par hypothèse, et comme A est de dimension finie sur k , il doit exister une famille finie $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ (d'idéaux à gauche maximaux de A) dont l'intersection est nulle : or ceci montre précisément que la flèche $\psi: A \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r (A/\mathfrak{m}_i)$ (dont le noyau est justement cette intersection) est injective. Par le même raisonnement qu'on a fait ci-dessus, on peut réduire l'ensemble des i tels que l'image de ψ soit précisément égal à cette somme directe. Par conséquent, A est semisimple.

Réciproquement, si A est semisimple, soit $\mathfrak{A} = \text{rad } A$ son radical de Jacobson et $\mathfrak{B}$ un idéal à gauche tel que $A = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. L'idéal à gauche $\mathfrak{B}$ doit être contenu dans un idéal à gauche maximal, $\mathfrak{m}$, mais comme $\mathfrak{A}$ est le radical de Jacobson, on a aussi $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{A}$, donc $\mathfrak{m}$ devrait contenir $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, ce qui est impossible. ✓

Motivations : Les exercices 1 et 2 prétendent, outre donner des exemples particulièrement simples où on peut calculer toutes les représentations irréductibles, illustrer les phénomènes qui se produisent lorsque le corps de base n'est pas algébriquement clos (et quand on passe à la clôture algébrique). L'exercice 3 est dû à Burnside ; en faisant un peu plus attention, avec les mêmes méthodes, on peut arriver au résultat suivant, de Schur : si G est un sous-groupe finiment engendré de $GL_n(k)$ (pour k un corps quelconque) et si tout élément de G est d'ordre fini, alors G lui-même est d'ordre fini. Il est à noter que ce résultat ne vaut plus pour un groupe abstrait. L'exercice 4 est à comparer avec l'exercice 4 de la feuille n°6 ; l'exercice 5 montre que le fait d'avoir un radical de Jacobson nul (la « J-semisimplicité ») constitue une généralisation de la semisimplicité pour des algèbres non nécessairement de dimension finie (en fait, la condition appropriée est que l'anneau est artinien à gauche) : néanmoins, on ignore encore si pour tout corps k de caractéristique zéro et tout groupe G l'algèbre de groupe $k[G]$ est J-semisimple (même lorsque $k = \mathbb{C}$ ce résultat, le théorème de Rickart, est délicat).