1. Soit Q le groupe des quaternions, i.e., le groupe ayant huit éléments $1, s_i, s_j, s_k, t, ts_i, ts_j, ts_k$, où t est central, $t^2 = 1$, et $s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = s_i s_j s_k = t$. On appelle $\mathbb{R}[Q]$ l'algèbre de groupe sur Q à coefficients dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les combinaisons $\mathbb{R}$-linéaire formelles d'éléments de Q, la multiplication provenant de celle sur Q). On rappelle qu'une représentation de Q signifie la même chose qu'une représentation de $\mathbb{R}[Q]$ (un $\mathbb{R}[Q]$-module à gauche).

Déterminer quatre représentations de Q de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que le plongement évident (soit $t \mapsto -1$, $s_i \mapsto i$, $s_j \mapsto j$ et $s_k \mapsto k$) de Q dans l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions réels (voir exercice 3 de la feuille n°2) définit une représentation irréductible (= simple) de Q de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. En déduire une écriture explicite de la $\mathbb{R}$-algèbre (semisimple) $\mathbb{R}[Q]$ comme produit d'algèbres simples.

En déduire une écriture de $\mathbb{C}[Q]$ comme produit d'algèbres de matrices (on rappelle que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, cf. *loc. cit.*). Quelles sont les représentations irréductibles complexes de Q ?

2. Soit C_n le groupe cyclique d'ordre n. Montrer que pour tout corps k on a $k[C_n] \cong k[t]/(t^n - 1)$: en particulier, que vaut $\mathbb{C}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{C}$? et que vaut $\mathbb{Q}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{Q}$?

3 (lemme de la trace). Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe opérant fidèlement et $\mathbb{C}$-linéairement sur V de sorte que la représentation V de G soit irréductible. On suppose que le caractère $\chi: G \to \mathbb{C}$, (c'est-à-dire la fonction associant à un $g \in G$ la trace de l'action $\rho(g)$ de g sur V) a une image finie de cardinal r. Montrer alors que $\operatorname{card} G \leq r^{n^2}$. Pour cela, on montrera (en utilisant un résultat de Burnside) qu'il existe n^2 éléments $g_1, \ldots, g_{n^2}$ de G qui (c'est-à-dire dont les images par $\rho: G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$) forment une $\mathbb{C}$-base de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, puis on montrera que les traces des hg_i, pour $h \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$, déterminent h.

Application (problème de Burnside pour les groupes linéaires) : Supposons que G soit un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $g^N = 1$ pour tout $g \in G$ (l'exposant de G divise N) : montrer qu'alors $\operatorname{card} G \leq N^{n^3}$, d'abord en supposant que $\mathbb{C}^n$ est une représentation irréductible de G, puis sans cette hypothèse (en procédant par récurrence sur la dimension, en décomposant explicitement l'action de G).

4 (radical de Jacobson). Soit A un anneau (associatif mais non nécessairement commutatif). On rappelle qu'un A-*module à gauche* (parfois dit « représentation » de A, mais on préfère garder ce terme pour le cas où A est une algèbre sur un corps k, ce que, d'ailleurs, on pourra éventuellement supposer) est un groupe abélien M muni d'un morphisme d'anneaux $A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$: naturellement, A lui-même est un A-module à gauche de façon évidente, et un sous-A-module de celui-ci (c'est-à-dire un sous-groupe additif de A stable par multiplication à gauche par A) sera appelé *idéal à gauche* de A. Un idéal à gauche est dit *maximal* lorsqu'il est strictement contenu dans A et maximal pour l'inclusion parmi les idéaux à gauche strictement contenus dans A. On dit par ailleurs qu'un A-module à gauche non nul est *simple* (ou *irréductible*) lorsque tout sous-A-module strict de celui-ci est nul.

Pour un élément $x \in A$ donné, montrer l'équivalence entre les affirmations suivantes : (i) x appartient à tous les idéaux à gauche maximaux de A, (ii) pour tout $a \in A$ l'élément $1 + ax$ est inversible à gauche dans A, et (iii) $xM = 0$ pour tout A-module à gauche simple M. En déduire que l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A est un idéal à droite (donc bilatère) de A, et que c'est l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A (pour cela, on pourra trouver une condition semblable à (ii) mais symétrique entre droite et gauche).

Cette intersection commune aux idéaux à gauche maximaux de A et aux idéaux à droite maximaux de A sera appelée *radical de Jacobson* de A et notée $\operatorname{rad} A$.

5 (semisimplicité). Cet exercice fait suite à l'exerice 4. Soit k un corps et A une k-algèbre (associative mais non nécessairement commutative) qu'on supposera tout du long être de dimension finie sur k ainsi que tous les modules qui vont intervenir. On dit que A est *semisimple* (a priori « à gauche », mais en fait cette condition est symétrique comme on va le voir) lorsque tout sous-A-module à gauche N d'un A-module à gauche M admet un supplémentaire (i.e., on peut écrire $M = N \oplus N'$ pour un certain sous-A-module à gauche N' de M). Montrer que A est semisimple si et seulement si A, vu comme A-module à gauche de la façon naturelle, est somme de A-modules à gauche simples (qui sont donc des idéaux à gauche non nuls minimaux pour l'inclusion).

On suppose que le radical de Jacobson de A est nul : montrer que pour une certaine famille finie $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ d'idéaux à gauche maximaux de A la flèche naturelle $A \to \bigoplus_i (A/\mathfrak{m}_i)$ est injective. En déduire que A est semisimple.

Réciproquement, si A est semisimple, montrer que son radical de Jacobson est nul (on pourra écrire un supplémentaire du radical).

Motivations : Les exercices 1 et 2 prétendent, outre donner des exemples particulièrement simples où on peut calculer toutes les représentations irréductibles, illustrer les phénomènes qui se produisent lorsque le corps de base n'est pas algébriquement clos (et quand on passe à la clôture algébrique). L'exercice 3 est dû à Burnside ; en faisant un peu plus attention, avec les mêmes méthodes, on peut arriver au résultat suivant, de Schur : si G est un sous-groupe finiment engendré de $GL_n(k)$ (pour k un corps quelconque) et si tout élément de G est d'ordre fini, alors G lui-même est d'ordre fini. Il est à noter que ce résultat ne vaut plus pour un groupe abstrait. L'exercice 4 est à comparer avec l'exercice 4 de la feuille n°6 ; l'exercice 5 montre que le fait d'avoir un radical de Jacobson nul (la « J-semisimplicité ») constitue une généralisation de la semisimplicité pour des algèbres non nécessairement de dimension finie (en fait, la condition appropriée est que l'anneau est artinien à gauche) : néanmoins, on ignore encore si pour tout corps k de caractéristique zéro et tout groupe G l'algèbre de groupe $k[G]$ est J-semisimple (même lorsque $k = \mathbb{C}$ ce résultat, le théorème de Rickart, est délicat).