**1.** Soit $A$ un anneau local[1]. Lorsque $M$ est un $A$-module de type fini, on appelle (très logiquement) *famille génératrice minimale* un ensemble d'éléments de $M$ qui engendrent celui-ci (en tant que $A$-module) et dont aucun sous-ensemble strict n'engendre $M$. Montrer que toutes les familles génératrices minimales de $M$ ont le même cardinal (fini). (Indication : si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $A$, on considérera $\tilde{M} = M/\mathfrak{m}M$ l'espace vectoriel résiduel sur le corps $k = A/\mathfrak{m}$. On appliquera le lemme de Nakayama.) Donner un contre-exemple à cette affirmation lorsque $A$ n'est pas un anneau local.

**2.** Soit $d$ un entier relatif sans facteur carré. On cherche à déterminer la clôture intégrale $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ de $\mathbb{Z}$ dans le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (autrement dit l'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$). Soit $\sigma\colon \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ l'unique élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q})$, groupe de Galois de l'extension (donc $\sigma\colon \sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$).

(1) Montrer que $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est entier (sur $\mathbb{Z}$) si et seulement si la trace $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(x) = x + \sigma(x)$ et la norme $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(x) = x \cdot \sigma(x)$ sont des entiers (relatifs). (Indication : quel est le polynôme minimal de $x$ sur $\mathbb{Q}$ ?)

(2) En déduire que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ vaut $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si $d \equiv 1 \pmod 4$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sinon.

**3.** Les deux questions suivantes sont indépendantes.

(1) Soit $A$ la partie de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes dont le coefficient de degré $1$ (ou, si on préfère, la dérivée à l'origine) est nul : montrer que $A$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle n'est pas intégralement close.

(2) Soit $A$ la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ formée des polynômes n'ayant que des monômes de degré total pair (ou, si on préfère, vérifiant $p(-x, -y) = p(x, y)$) : montrer que $A$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x, y]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle est intégralement close. Montrer cependant que $A$ n'est pas un anneau factoriel.

**4.** (1) On rappelle que le radical (de Jacobson) $\mathrm{rad}\, A$ d'un anneau (commutatif) $A$ est l'intersection de tous ses idéaux maximaux. Montrer que $x \in A$ est dans $\mathrm{rad}\, A$ si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $1 + ax \in A^\times$ (où $A^\times$ désigne le groupe des unités — c'est-à-dire les éléments inversibles de $A$).

(2) On appelle nilradical $\mathrm{Nil}\, A$ d'un anneau (commutatif) $A$ l'intersection de tous ses idéaux premiers[2]. Montrer que $\mathrm{Nil}\, A$ est l'ensemble des éléments nilpotents de $A$. (Indication : on pourra être amené à considérer, donné $x \in A$ non nilpotent, un élément maximal pour l'inclusion parmi les idéaux ne contenant aucune puissance de $x$ — et montrer que cet idéal est premier.)

(3) Manifestement, $\mathrm{Nil}\, A \subseteq \mathrm{rad}\, A$ pour tout anneau (commutatif) $A$ (pourquoi ?). Montrer que si $A$ est un anneau *artinien*, c'est-à-dire que toute suite d'idéaux décroissante pour l'inclusion stationne, alors il y a égalité. (Indication : si $\mathfrak{R} = \mathrm{rad}\, A$, on considérera la suite décroissante $\mathfrak{R}^k$ des puissances de l'idéal $\mathfrak{R}$ et on appliquera le lemme de Nakayama. Pour simplifier, on pourra admettre le résultat suivant : tout anneau artinien est noethérien.)

(4) Montrer que si $A$ est un anneau (commutatif) quelconque alors $\mathrm{rad}(A[t]) = \mathrm{Nil}(A[t]) = (\mathrm{Nil}\, A)[t]$. (On montrera d'abord que $(A/\mathrm{Nil}\, A)[t]$ est réduit, puis on utilisera les critères prouvés en (1) et (2).)

---

([1]) On rappelle qu'un anneau (commutatif) est dit *local* lorsque l'ensemble de ses éléments non inversibles forme un idéal $\mathfrak{m}$, qui est alors l'unique idéal maximal de $A$ (un idéal maximal $\mathfrak{m}$ est un idéal strict maximal pour l'inclusion — ou, de façon équivalente, tel que $A/\mathfrak{m}$ est un corps).

([2]) Un idéal (strict) $\mathfrak{p}$ est dit premier lorsque $A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre, ou, de façon équivalente, lorsque $xy \in \mathfrak{p}$ implique $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$.

**Motivations :** L'exercice 1 est la conséquence la plus classique du lemme de Nakayama. L'exercice 2 est un fait fondamental de théorie algébrique des nombres. L'exercice 3 a une interprétation en géométrie algébrique (l'anneau $A$ du (1) est l'anneau des fonctions sur une courbe cubique cuspidale tandis que celui du (2) est l'anneau des fonctions sur un cône quadratique ; on montre donc essentiellement qu'une courbe cuspidale n'est pas normale mais qu'un cône quadratique l'est). L'exercice 4 est important à plusieurs titres : d'une part, si on appelle *anneau de Jacobson* un anneau dans lequel le nilradical coïncide avec le radical de Jacobson, alors la substance algébrique du théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz) est le fait qu'une algèbre de type fini sur un corps est un anneau de Jacobson ; le (4) est un théorème de Snapper ; d'autre part, il y a des généralisations aux anneaux non nécessairement commutatifs du radical de Jacobson (l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche, qui se trouve être aussi l'intersection de tous les idéaux maximaux à droite) et aussi du nilradical (la somme de tous les idéaux bilatères nils, c'est-à-dire dont tous les éléments sont nilpotents, est appelée le nilradical supérieur, c'est un idéal bilatère nil, mais il ne contient pas nécessairement tous les éléments nilpotents ; il existe aussi un nilradical inférieur), et le fait est que dans un anneau artinien à gauche (ou à droite) le radical de Jacobson est nilpotent et coïncide avec le nilradical (inférieur ou supérieur).