1. Montrer que les extensions $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ de $\mathbb{Q}$ sont galoisiennes, et calculer leurs groupes de Galois. L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ est-elle galoisienne sur $\mathbb{Q}$?

2. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes sur $\mathbb{Q}$ (on pourra réduire modulo 2, 3 et/ou 5) : (a) $t^4+2t^2+t+3=0$, (b) $t^4+3t^3-3t-2=0$, (c) $t^6+22t^5-9t^4+12t^3-37t^2-29t-15=0$.

3 (l'endécagone régulier). Expliquer de façon détaillée (mais sans faire les calculs) comment on peut démontrer que $\cos\frac{2\pi}{11}$ vaut

$$\begin{aligned}-\frac{1}{10}+\frac{1}{40}\sqrt[5]{\frac{11}{4}}\Bigg(&\Big(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}-20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}+20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}-25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}+25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\Bigg)\end{aligned}$$

(ici $\sqrt[5]{z}$ désigne la détermination principale de la racine cinquième, c'est-à-dire celle dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$).

4. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes sur le corps $\mathbb{C}(\lambda)$ des fractions rationnelles en une indéterminée : (a) $t^n+\lambda=0$, (b) $t^3+t+\lambda=0$, (c) $t^4+2(1-2\lambda)t^2+1=0$, (†) (d) $t^5-\lambda t^2+\lambda^2-\lambda=0$.

Motivations : L'exercice 1 est un cas flagrant mais assez facile où la théorie de Galois n'est pas triviale : les équations biquadratiques $t^4-4t^2+2=0$, $t^4-4t^2+1=0$ et $t^4-4t^2-1=0$, bien que d'apparence semblable (et toutes irréductibles) ont des groupes de Galois différents (on pourrait d'ailleurs rajouter $t^4-4t^2=0$ ou encore $t^4-4t^2-5=0$ pour avoir encore deux autres groupes de Galois, mais ces polynômes ne sont bien sûr pas irréductibles). L'exercice 2 montre comment la réduction modulo p peut servir à calculer des groupes de Galois. L'exercice 3 est une application concrète de la méthode de résolution par radicaux. L'exercice 4 est en quelque sorte analogue du 2 sur les corps de fonctions, et il touche à la géométrie algébrique.