1. Soit A un anneau et B une A-algèbre (non nécessairement commutative) non nulle : montrer que $B \otimes_A B$ est encore non nulle.

2. Décrire, en tant qu'algèbre sur $\mathbb{R}$, le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On précisera les deux structures de $\mathbb{C}$-algèbre sur ce produit tensoriel (provenant de la multiplication sur le facteur de gauche ou sur le facteur de droite).

3. On appelle algèbre des quaternions, et on note $\mathbb{H}$, l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4...). Montrer qu'il s'agit d'une algèbre à divisions (i.e., tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse) et montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (on pourra par exemple introduire les matrices $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) et (†) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ (on pourra s'inspirer des matrices utilisées pour répondre à la question précédente).

4 (algèbres de Clifford). Soit k un corps, qu'on supposera pour simplifier de caractéristique différente de 2 (c'est-à-dire que $2 \neq 0$ dans k), V un k-espace vectoriel de dimension finie et $q\colon V \to k$ une forme quadratique sur V. On appelle *algèbre de Clifford* associée à q le quotient $C(q)$ de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ de V par son idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes x - q(x)\,1$ (où x parcourt V). Montrer que $C(q)$ a une dimension finie sur k qu'on calculera. Que vaut $C(q)$ si $q = 0$? Que vaut $C(q)$ si q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ donnée par $q(x) = -x^2$ (respectivement $q(x) = +x^2$) ?

Montrer que pour tout r il existe un espace vectoriel de dimension r de matrices réelles (de taille non précisée) dans lequel seule la matrice nulle n'est pas inversible.

5. Soit $f\colon V \to V$ un endomorphisme (k-linéaire) d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k : on considère V comme un $k[t]$-module par la multiplication $P \cdot x = P(f)(x)$ (cf. exercice 5 de la feuille n°1). Décrire autant que possible l'algèbre extérieure $\bigwedge_{k[t]}^{\bullet} V$ de V (comme $k[t]$-module) et notamment la dimension (comme k-espace vectoriel) de chaque $\bigwedge_{k[t]}^{\ell} V$.

Motivations : L'exercice 1 est à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n°1 où il est prouvé que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. L'exercice 2 est une introduction à un point de vue possible sur la théorie de Galois (si K est une extension finie d'un corps k, que peut-on dire de $K \otimes_k K$ en tant qu'algèbre ?), et l'exercice 3 lui fait naturellement suite et pourrait servir d'introduction au groupe de Brauer (ici, l'algèbre des quaternions constitue une classe dans le groupe de Brauer dont on montre qu'elle est déployée par $\mathbb{C}$ et qu'elle est de 2-torsion). L'exercice 4 introduit une construction algébrique très importante (par exemple dans l'étude des formes quadratiques) ; on pourrait le prolonger en se demandant par exemple quelles sont les algèbres de Clifford sur $\mathbb{R}$ et quels en sont les produits tensoriels. L'exercice 5 est du remplissage...