1. Calculer les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ de deux quelconques des groupes abéliens (autrement dit, $\mathbb{Z}$-modules) parmi : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n un naturel non nul variable), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Plus généralement, on pourra décrire le produit tensoriel d'un groupe abélien $\mathbb{Z}$ quelconque avec l'un de ces groupes.)

Corrigé. Pour tout groupe abélien M on a $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = M$. Pour tensoriser avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on vérifie que $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = M/nM$ (car $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est réduit aux $x \otimes 1$ avec $x \in M$ et que ceux-ci sont tués par la multiplication par n) : donc $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m \wedge n)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ (tout élément de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est multiple de n).

Ensuite, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ car $\frac{p}{q} \otimes \frac{p'}{q'} = (q'\frac{p}{qq'}) \otimes (p'\frac{1}{q'}) = (p'\frac{p}{qq'}) \otimes (q'\frac{1}{q'}) = \frac{pp'}{qq'} \otimes 1$ donc tout élément est de la forme $r \otimes 1$ avec $r \in \mathbb{Q}$ — et deux tels éléments sont distincts puisqu'il existe une flèche $r \otimes r' \mapsto rr'$.

Pour former le produit tensoriel d'un groupe abélien M avec $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$ on peut commencer par considérer le quotient M' de M par le sous-groupe des éléments d'ordre fini : en effet, si x est d'ordre fini n, on a $x \otimes 1 = (nx) \otimes \frac{1}{n} = 0 \otimes \frac{1}{n} = 0$ donc tous ces éléments sont tués dans le produit tensoriel, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. En particulier, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ car tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini.

Une fois qu'on est ainsi ramené à un groupe abélien M sans torsion (= dont tous les éléments sont d'ordre infini), $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ peut se décrire comme l'ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ des fractions $\frac{x}{n} = x \otimes \frac{1}{n}$ où on a identifié $\frac{x}{n}$ et $\frac{x'}{n'}$ lorsque $n'x = nx'$ ou bien où on a imposé que n n'est divisible par aucun diviseur de n (la fraction est « irréductible »), avec l'addition évidente.

Enfin, $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ se décrit comme le quotient de $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ par son sous-groupe M (considéré comme l'ensemble des $\frac{x}{1} = x \otimes 1$). Notamment, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ puisque déjà $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. ✓

2. Soient U et V deux espaces vectoriels (sur un corps k). On note $U^\vee = \mathrm{Hom}_k(U, k)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi\colon U^\vee \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs purs (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^\vee$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

Corrigé. Pour définir une application linéaire $U^\vee \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U, V)$ il suffit de définir une application bilinéaire $U^\vee \times V \to \mathrm{Hom}_k(U, V)$: on le fait en envoyant une forme linéaire λ sur U et un vecteur v de V sur l'application linéaire $U \to V$ donnée par $x \mapsto \lambda(x)\, v$.

L'image d'un tenseur pur $\lambda \otimes v$ est donc l'application linéaire $x \mapsto \lambda(x)\, v$, qui est de rang[1] 1 (ou 0). Réciproquement, toute application linéaire de rang 1 a une image contenue dans $\langle v \rangle = kv$ pour un certain v et donc s'écrit de la forme $x \mapsto \lambda(x)\, v$. On a ainsi prouvé que l'image des tenseurs purs dans $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ par Φ était l'ensemble des applications linéaires de rang 1. On en déduit que l'image de Φ est l'ensemble des applications linéaires de rang fini (toute application de rang fini est somme d'applications de rang 1 comme on le voit facilement en prenant une base de l'image).

Montrons enfin que Φ est injective : soit $\sum_i \lambda_i \otimes v_i \in U^\vee \otimes_k V$ (somme finie). dont l'image par Φ, soit $x \mapsto \sum_i \lambda_i(x)\, v_i$, est nulle. Quitte à remplacer les v_i par des combinaisons linéaires d'une base de l'espace $\langle v_i \rangle$ qu'ils engendrent, on peut supposer qu'ils sont linéairement indépendants ; alors puisque $x \mapsto \sum_i \lambda_i(x)\, v_i$ est nulle, chacun des λ_i doit l'être, et c'est donc bien que $\sum_i \lambda_i \otimes v_i$ est nulle.

Manifestement, Φ est un isomorphisme si et seulement si toute application k-linéaire $U^\vee \to V$ est de rang fini, c'est-à-dire si et seulement si $U^\vee$ ou V est de dimension finie. ✓

([1]) Au sens « dimension de l'image ».

3 (applications multilinéaires). Soit A un anneau (commutatif) et $M_1, \ldots, M_s, N$ des A-modules. On dit qu'une application $M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ est A-s-linéaire (ou, de façon moins précise, A-multilinéaire) lorsque chacune des applications partielles est A-linéaire. Montrer qu'il existe un A-module P et une application A-s-linéaire $\varpi\colon M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ tels que toute application A-s-linéaire $f\colon M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ se factorise de façon unique en $f = \tilde{f}\varpi$ où $\tilde{f}\colon P \to N$ est A-linéaire. Montrer que P est unique à isomorphisme (commutant aux ϖ) vérifiant cette propriété.

Corrigé. On pose $P = \bigotimes_{i=1}^{s} M_i$, et soit ϖ qui envoie un s-uplet $(x_1, \ldots, x_s)$ dans $\prod_{i=1}^{s} M_i$ sur $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s$. Manifestement ϖ est s-linéaire. De plus, si $f\colon M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ est s-linéaire, on en déduit successivement, en appliquant à chaque fois la propriété universelle du produit tensoriel, des applications $(M_1 \otimes M_2) \times M_3 \cdots \times M_s \to N$ et ainsi de suite jusqu'à $P = M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_s \to N$, respectivement $(s-1)$-linéaire jusqu'à 1-linéaire (= linéaire tout court), factorisant f de façon unique par les applications évidentes (la dernière étant ϖ). Bref, P vérifie bien la propriété universelle demandée.

L'unicité à isomorphisme près découle du *general nonsense* : si P' et ϖ' vérifient la même chose, on factorise ϖ en $\tilde{\varpi}\varpi'$ puis ϖ' en $\tilde{\varpi}'\varpi$, et on a $\varpi = \tilde{\varpi}\tilde{\varpi}'\varpi$ donc par la partie unicité $\tilde{\varpi}\tilde{\varpi}' = \mathrm{id}_P$ et $\tilde{\varpi}'\tilde{\varpi} = \mathrm{id}_{P'}$, ce qui prouve que $\tilde{\varpi}$ et $\tilde{\varpi}'$ sont des isomorphismes réciproques. ✓

4. Soient U et V deux espaces vectoriels de dimensions finies m et n respectivement sur un corps k. Soient $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$ des endomorphismes (k-linéaires). Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_{f\otimes g}$ de $f \otimes g\colon U \otimes_k V \to U \otimes_k V$ est une fonction polynomiale des polynômes caractéristiques χ_f et χ_g de f et g.

Corrigé. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Le polynôme caractéristique $\chi_u = \det(X - u)$ d'un endomorphisme u ne dépend pas du corps sur lequel on le calcule. Sur $\bar{k}$, on peut écrire (de façon unique) $f = f_{\mathrm{s}} + f_{\mathrm{n}}$ sur k, où f_{s} est diagonalisable et f_{n} est nilpotent, avec $f_{\mathrm{s}} f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n}} f_{\mathrm{s}}$. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le même que celui de f_{s}, c'est-à-dire $\prod_i (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de f_{s} comptées avec multiplicité. On décompose de même g en g_{s} et g_{n}. On a alors $f \otimes g = (f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}) + (f_{\mathrm{n}} \otimes g_{\mathrm{s}} + f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{n}} + f_{\mathrm{n}} \otimes g_{\mathrm{n}})$, et le second terme est somme de nilpotents qui commutent deux à deux, donc nilpotent, le premier est diagonalisable, et ils commutent. On a donc $(f \otimes g)_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}$ et le polynôme caractéristique de $f \otimes g$ est celui de $f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}$: on est ainsi ramené au cas où f et g (et donc $f \otimes g$) sont diagonalisables, ce qu'on suppose dorénavant.

En diagonalisant f sur $\bar{k}$ (ce qui revient à écrire U comme somme directe de sous-espaces stables de dimension 1 de f) et g de même on voit que $f \otimes g$ (en distribuant le produit tensoriel $U \otimes_k V$ sur ces décompositions de U et V, ou, ce qui revient au même, en prenant la base produit de deux bases de diagonalisation) se diagonalise avec pour valeurs propres les produits $\lambda_i \mu_j$ des valeurs propres λ_i de f et des valeurs propres μ_j de g, chacune apparaissant avec la multiplicité produit.

Reste enfin à montrer que $\chi_{f\otimes g} = \prod_{i,j}(X - \lambda_i \mu_j)$ s'exprime de façon polynômiale — sur k ou sur n'importe quel corps, et même sur $\mathbb{Z}$ — dans les coefficients de $\chi_f = \prod_i (X - \lambda_i)$ et de $\chi_g = \prod_j (X - \mu_j)$. On peut le faire en considérant les λ_i comme m indéterminées et les μ_j comme n autres (et en travaillant sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps fini quelconque, donc, si on veut, sur un corps quelconque ou même sur $\mathbb{Z}$). D'abord, pour λ une indéterminée, les coefficients de $\prod_j (X - \lambda\mu_j)$ s'exprime comme polynôme en λ et les coefficients de $\chi_g = \prod_j (X - \mu_j)$ (plus précisément, si $g = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ alors $\prod_j (X - \lambda\mu_j) = X^n + \lambda a_1 X^{n-1} + \cdots + \lambda^n a_n$. Ainsi, $\chi_{f\otimes g} = \prod_{i,j}(X - \lambda_i\mu_j)$ s'exprime comme polynôme en les λ_i et les coefficients de χ_g, mais, qui plus est, chacun des coefficients de ce polynôme est invariant par n'importe quelle permutation des λ_i : il s'exprime donc comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires des λ_i, qui sont les coefficients de χ_f. On a bien montré que les coefficients de $\chi_{f\otimes g}$ sont des polynômes de ceux de χ_f et χ_g. ✓

5. Soit k un corps : on note $k[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k en l'indéterminée t. Expliquer pourquoi se donner un $k[t]$-module équivaut à se donner un k-espace vectoriel U muni d'une application linéaire $f\colon U \to U$. Sous cette identification, décrire le produit tensoriel $U \otimes_{k[t]} V$ sur $k[t]$ de deux k-espaces vectoriels U et V munis d'endomorphismes $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$.

Corrigé. Tout $k[t]$-module U est naturellement un k-espace vectoriel, et on définit une application k-linéaire $f\colon U \to U$ donnée par la multiplication par $t \in k[t]$ (soit $x \mapsto t \cdot x$) pour la structure de $k[t]$-module. Réciproquement, si on se donne un k-espace vectoriel U et un $f\colon U \to U$ linéaire, on définit une structure de $k[t]$-module sur U par $P \cdot x = P(f)(x)$ pour tout polynôme $P \in k[t]$. Ces deux opérations sont bien réciproques l'une de l'autre comme on le vérifie immédiatement.

Dire qu'une application k-linéaire $\phi\colon U \to U'$ est $k[t]$-linéaire, où U et U' sont munis de la structure de $k[t]$-module définie par deux endomorphismes $f\colon U \to U$ et $f'\colon U' \to U'$ signifie manifestement que $\phi f = f'\phi$ (qui traduit $\phi(t \cdot x) = t \cdot \phi(x)$ et tout le reste en découle).

Donnés U et V deux k-espaces vectoriels munis d'applications linéaires $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$, considérés comme des $k[t]$-modules de la façon décrite ci-dessus, on appelle W le quotient du k-espace vectoriel $U \otimes_k V$ par l'image de l'application linéaire $Z = f \otimes \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_U \otimes g\colon U \otimes_k V \to U \otimes_k V$. Se donner une application $k[t]$-bilinéaire $U \times V \to H$ (où H est muni de $h\colon H \to H$) revient d'après le paragraphe précédent à se donner $\phi\colon U \times V \to H$ qui soit k-bilinéaire et vérifie $\phi(f(x), y) = \phi(x, g(y)) = h(\phi(x, y))$ pour tous $(x, y) \in U \times V$: c'est dire que l'application k-linéaire $\tilde{\phi}\colon U \otimes_k V \to H$ déduite de ϕ (par la propriété universelle du produit tensoriel) vérifie $\tilde{\phi}Z = 0$, donc conduit à un $\hat{\phi}\colon W \to H$ vérifiant $\hat{\phi}e = h\hat{\phi}$ où $e\colon W \to W$ est définie indifféremment par $f \otimes \mathrm{id}_V$ ou $\mathrm{id}_U \otimes g$ (cela a bien un sens car $f \otimes \mathrm{id}_V$ et $\mathrm{id}_U \otimes g$ commutent). Ce W et e définissent un $k[t]$-module dont on a justement montré qu'il satisfaisait la propriété universelle du produit tensoriel (on n'avait aucun choix dans les constructions) : c'est donc $U \otimes_{k[t]} V$. ✓

6. Soit k un corps, et $A = k[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées x et y sur k (on rappelle qu'il est factoriel). Soit $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal de A engendré par x et y — qu'on verra notamment comme un A-module. Pour éviter les confusions, on notera $\mathfrak{m}^{\oplus 2} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ la somme directe (= le produit direct) de deux copies de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ l'idéal produit de $\mathfrak{m}$ avec lui-même. Le but de l'exercice est de déterminer le produit tensoriel $\mathfrak{m}^{\otimes 2} = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}$ avec lui-même au-dessus de A.

(1) On considère $\varphi\colon A^{\oplus 2} \to \mathfrak{m}$ défini par $\varphi(f, g) = fx + gy$. Expliquer pourquoi φ est surjective et montrer que son noyau est l'image d'une application A-linéaire $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}$ injective à préciser.

(2) En déduire que $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ peut se décrire comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module isomorphe à $\mathfrak{m}$ que l'on précisera. On appellera $\varphi_{\mathfrak{m}}$ la surjection $\mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ ainsi définie.

(3) Soit $\mu\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ défini par $\mu(m \otimes m') = mm'$: quelle est l'image de μ ? Quelle est la composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$?

(4) Soit $\Delta = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Montrer que $\mu(\Delta) = 0$ et $\Delta \neq 0$.

(5) Montrer que tout élément du noyau $\ker \mu$ de μ s'écrit de la forme $t\Delta$ pour un $t \in k$: on pourra montrer pour $d \in \ker \mu$ que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$.

(6) Définir une application A-linéaire (non canonique) $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ telle que la composée $\mu\lambda$ soit l'identité.

(7) Conclure quant à la structure de $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ en tant que A-module.

Corrigé. (1) La surjectivité de φ n'est autre que l'affirmation que $\mathfrak{m}$ est engendré par x et y, ce qui en est la définition. Le noyau de φ est l'ensemble des couples (f, g) d'éléments de A tels que $fx = -gy$: pour un tel couple, f doit être divisible par y donc on peut écrire $f = hy$ et alors $g = -hx$, c'est-à-dire que (f, g) est l'image de h par $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}, h \mapsto (hy, -hx)$. L'injectivité de ψ est évidente (A est intègre).

(2) Puisque φ est surjective, on en déduit (exactitude à droite du produit tensoriel) que $\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ l'est aussi et que son noyau est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}} = \psi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. On peut décrire ces flèches un peu mieux : $\psi_{\mathfrak{m}}$ envoie $m \in \mathfrak{m}$ sur $(my, -mx) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ et $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie $(fm, gm) = (f, g) \otimes m \in \mathfrak{m}^{\oplus 2} = A^{\oplus 2} \otimes_A \mathfrak{m}$ (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $(fx + gy) \otimes m \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, c'est-à-dire (quitte à faire passer f et g de l'autre côté du signe $\otimes$) que $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (m, m') sur $x \otimes m + y \otimes m'$. L'injectivité de $\psi_{\mathfrak{m}}$ est évidente : il s'agit de la restriction de ψ à $\mathfrak{m}$ au départ et $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ à l'arrivée. On a donc bien décrit $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ (l'image de $\varphi_{\mathfrak{m}}$) comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module (le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, qui est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}}$) isomorphe à $\mathfrak{m}$ (comme $\psi_{\mathfrak{m}}$ est injective).

(3) L'image de μ est le sous-A-module de $\mathfrak{m}$, donc de A, engendré par les produits de deux éléments quelconques de $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = (x^2, xy, y^2)$. La composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (fm, gm) (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $fmx + gmy$, autrement dit, $\mu\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ où $\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ désigne l'injection canonique de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ dans $A^{\oplus 2}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker\mu \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m} \arrow[r, "\psi_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{m}}"] & \mathfrak{m}^{\oplus 2} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}"] & \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A^{\oplus 2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[r, "0"] \arrow[d] & k^{\oplus 2} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & k^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

(4) On a $\mu(\Delta) = \mu(x \otimes y - y \otimes x) = xy - yx = 0$. Montrons maintenant que $\Delta \neq 0$: on a $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, 0) - \varphi_{\mathfrak{m}}(0, x) = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, -x)$, et pour montrer que $\Delta \neq 0$ il suffit de prouver que $(y, -x) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ n'est pas dans le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, lequel est également l'image de $\psi_{\mathfrak{m}}$; or $(y, -x) = \psi(1)$ et comme $1 \in A$ n'est pas dans $\mathfrak{m}$, que ψ est injective et que $\psi_{\mathfrak{m}}$ est sa restriction à $\mathfrak{m}$, on bien $\Delta \neq 0$. (Une autre façon de raisonner consiste à observer que l'application A-bilinéaire $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to k$ qui envoie $(ax + by + \cdots, a'x + b'y + \cdots)$ sur ba' définit une application A-linéaire $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to k$ qui prend une valeur non nulle sur Δ.)

(5) Prenons $d \in \ker\mu$: puisque $\varphi_{\mathfrak{m}}$ est surjective, on peut écrire $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(m, m')$ avec $(m, m') \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. Alors $\varphi(m, m') = 0$ car $\varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}} = \mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ donc il s'écrit aussi $\mu(d) = 0$. Mais ceci signifie (comme le noyau de φ est l'image de ψ) que $(m, m') = \psi(h)$ pour un (unique) $h \in A$. Soit $t = h(0, 0)$ la classe de h dans $A/\mathfrak{m} = k$. Alors $h - t$ est dans $\mathfrak{m}$ donc $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h - t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi_{\mathfrak{m}}(h - t)) = 0$ de sorte que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h))$ s'écrit aussi $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$. On a vu

plus haut que $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, -x)$ et donc $d = t\Delta$.

(6) On définit $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m}\otimes_A\mathfrak{m}$ par $\lambda(x^2) = x\otimes x$, $\lambda(xy) = x\otimes y$ et $\lambda(y^2) = y\otimes y$. Comme les générateurs x^2, xy, y^2 de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ ne sont pas libres (ils satisfont des relations), il faut vérifier que ceci a bien un sens : or les relations sont engendrées[2] par $y(x^2) = x(xy)$ et $y(xy) = x(y^2)$, et on a bien $y(x \otimes x) = x \otimes (xy) = x(x \otimes y)$ d'une part et d'autre part $y(x \otimes y) = x \otimes (y^2) = (xy) \otimes y = x(y \otimes y)$ dans $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, donc λ est bien définie. Il est ensuite clair que $\mu\lambda = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}^{\cdot 2}}$.

(7) On a enfin $\ker \mu \oplus \operatorname{im} \lambda = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ avec λ injective donc un isomorphisme de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ sur son image et $\ker \mu = k\Delta$ isomorphe à k. Bref, $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ est isomorphe à la somme directe de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ et de k. ✓

7. On note $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers dont presque tous les termes (c'est-à-dire : tous sauf un nombre fini) sont nuls, et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le groupe abélien de toutes les suites d'entiers. Expliciter $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et les comparer à $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

(†) De façon plus générale, montrer que si M est un groupe abélien, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ s'identifie à un sous-groupe de $M^{\mathbb{N}}$ (propre en général) et le décrire.

(‡) Donner un exemple d'anneau (commutatif) A et de module M sur A tel que l'application linéaire naturelle $M \otimes_A A^{\mathbb{N}} \to M^{\mathbb{N}}$ ne soit même pas injective. Montrer par un exemple que l'application Φ définie de façon analogue à celle de l'exercice 2, mais pour des modules sur un anneau (commutatif) au lieu des espaces vectoriels, peut ne pas être injective.

Corrigé. On a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$, le $\mathbb{Z}$-module libre de base dénombrable, donc (le produit tensoriel distribue sur la somme directe) $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, lui, n'est pas libre[3], et le produit tensoriel ne distribue pas sur le produit direct infini. Néanmoins, on peut décrire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme ceci : c'est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ formé des suites de rationnels dont le dénominateur reste borné ; en effet, si on note E l'espace ainsi décrit, on a une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to E$ envoyant $(u_n) \otimes r$ sur (ru_n), et on peut lui définir une réciproque en envoyant une suite (u_n) de rationnels de dénominateur borné sur $(Nu_n) \otimes \frac{1}{N}$ où N est tel que tous les Nu_n soient entiers. On peut aussi faire appel à l'exercice 1.

Lorsque M est un groupe abélien quelconque, l'application naturelle $\Psi\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to M^{\mathbb{N}}$ a une image qui tombe manifestement dans le sous-groupe M_∞ de $M^{\mathbb{N}}$ formé des suites (x_i) d'éléments de M telles que le sous-groupe $\langle(x_i)\rangle$ de M engendré par les x_i soit de type fini (c'est-à-dire engendré par un nombre fini de ses éléments ou, de façon équivalente, d'entre les x_i) ; pour montrer que M_∞ est bien un sous-groupe de $M^{\mathbb{N}}$ on utilise le fait que tout sous-groupe d'un groupe abélien de type fini est encore de type fini ($\mathbb{Z}$ est noethérien). Le fait que l'image de Ψ est exactement M_∞ est facile : si (x_i) est une suite d'éléments de M tels que $x_0, \ldots, x_n$ suffisent à engendrer tous les x_i, on trouve facilement des suites d'entiers $(u_{i0}), \ldots, (u_{in})$ (vérifiant $u_{ii} = 1$ si $i \leq n$ et $u_{ij} = 0$ si $i \neq j$ avec $i \leq n$ et $j \leq n$) telles que $x_i = \sum_{j=0}^n u_{ij}x_j$ pour tout i donc (x_i) est l'image de $\sum_{j=0}^n x_j \otimes (u_{ij})$. Pour montrer que Ψ est injective, il faut se fatiguer plus : soit $\sum_{j=0}^n x_j \otimes (u_{ij}) \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dont l'image par Ψ est nulle, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^n u_{ij}x_j = 0$ pour tout i. Mais l'ensemble $\mathcal{R}$ des « relations » entre $x_0, ..., x_n$, c'est-à-dire l'ensemble des $(n + 1)$-uplets $(v_0, ..., v_n)$ de naturels tels que $\sum_{j=0}^n v_jx_j = 0$, est un groupe abélien, de type fini car sous-groupe de $\mathbb{Z}^{n+1}$ (il se trouve même qu'il est libre, mais on n'en aura pas besoin). Du coup, il existe des $(v_{\ell j})$ pour $\ell = 0, ..., r$ (et $j = 0, ..., n$ toujours) tels que, pour chaque i, (u_{ij}) soit combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des $(v_{\ell j})$, mettons $u_{ij} = \sum_{\ell=0}^r k_{i\ell}v_{\ell j}$; mais alors par bilinéarité de $\otimes$ on a $\sum_{j=0}^n x_j \otimes (u_{ij}) = \sum_{\ell=0}^r (k_{i\ell}) \otimes (\sum_{j=0}^n v_{\ell j}x_j) = 0$, d'où l'injectivité.

([2]) Pour s'en convaincre, on suppose qu'on a $f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 = 0$, on remarque que f_0 est forcément divisible par y et f_2 par x et alors que f_1 appartient à $\mathfrak{m}$, bref, $f_0 = yh_0$, $f_1 = yh_2 - xh_0$ et $f_2 = -xh_2$ et les deux relations annoncées sont bien génératrices.

([3]) Ce n'est pas évident ; en tout cas, ce qui suit ne le prouve pas.

Considérons maintenant l'anneau A ainsi défini : on part d'un corps k et on forme la réunion (ou, pour parler mieux, la limite inductive), notée $k[y,(x_i)]$, de tous les anneaux de polynômes $k[y,x_1,\ldots,x_n]$ (n étant un entier naturel), et enfin on pose $A = k[y,(x_i)]/((x_ix_j)_{i\neq j},(yx_i))$ le quotient de $k[y,(x_i)]$ par l'idéal engendré par tous les produits de deux indéterminées distinctes, soit les x_ix_j ($i \neq j$ tous deux dans $\mathbb{N}$) et les yx_i (pour i dans $\mathbb{N}$). Soit enfin I l'idéal engendré par y dans A. Alors l'élément $y \otimes (x_i)$ de $I \otimes_A A^{\mathbb{N}}$ s'envoie sur 0 dans $I^{\mathbb{N}}$. Pourtant, il n'est pas nul. En effet, I est (grâce à la flèche $A \to I$ de multiplication par y) le quotient de A par l'image de l'application $\phi\colon A^{(\mathbb{N})} \to A$ qui envoie (a_i) presque nulle sur $\sum_j a_jx_j$; on en déduit que $I \otimes_A A^{\mathbb{N}}$ est le quotient de $A^{\mathbb{N}}$ par l'image de l'application $\phi \otimes \mathrm{id}_{A^{\mathbb{N}}}\colon A^{(\mathbb{N})} \otimes_A A^{\mathbb{N}} = (A^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N})} \to A$ qui envoie (c_{ij}) sur $(\sum_j c_{ij}x_j)$: mais on constate facilement que la suite (x_i) ne peut pas s'écrire comme l'image par cette flèche d'un (c_{ij}) vérifiant le fait (traduisant l'appartenance à $(A^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N})}$) qu'il n'y a qu'un nombre fini de j pour lesquels c_{ij} n'est pas nul pour tout i.

Enfin, pour donner un exemple où U et V sont deux modules sur un anneau (commutatif) A et où l'application $\Phi\colon U^\vee \otimes_A V \to \mathrm{Hom}_A(U,V)$ définie par $\lambda \otimes v \mapsto (x \mapsto \lambda(x)\,v)$ n'est pas injective, on reprend les notations ci-dessus, c'est-à-dire un anneau commutatif A et un idéal I de A tels que $A^{\mathbb{N}} \otimes_A I \to I^{\mathbb{N}}$ ne soit pas injective ; alors en posant $U = A^{(\mathbb{N})}$ on a $U^\vee = A^{\mathbb{N}}$, et avec $V = I$ on voit que $\Phi\colon U^\vee \otimes_A V \to \mathrm{Hom}_A(U,V)$ coïncide précisément avec $A^{\mathbb{N}} \otimes_A I \to I^{\mathbb{N}}$ d'où la non injectivité. ✓

8 (modules plats). Un module P sur un anneau (commutatif) A est dit *plat* lorsque pour tout A-module M et tout sous-module M' de A, en notant $i\colon M' \to M$ l'injection canonique, l'application A-linéaire $i \otimes \mathrm{id}_P\colon M' \otimes_A P \to M \otimes_A P$ est injective. Montrer qu'un module libre est plat, qu'un produit tensoriel (fini) de modules plats est plat, et qu'une somme directe (finie ou infinie) est plate si et seulement si chacun des termes est plat.

Corrigé. Si $F = A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A$ est un module libre, alors $M' \otimes_A F = \bigoplus_{i\in I} M'$ est le sous-module de $M \otimes_A F = \bigoplus_{i\in I} M$ formé des éléments toutes les coordonnées sont dans M', et $i \otimes \mathrm{id}_F$ est l'inclusion, donc F est bien plat.

Si P_1 et P_2 sont plats et $i\colon M' \to M$ l'inclusion d'un sous-module M' dans un module M, alors $i \otimes 1_{P_1\otimes P_2} = i \otimes 1_{P_1} \otimes 1_{P_2}$ est injective car i l'est donc (par platitude de P_1) $i \otimes 1_{P_1}$ l'est donc (par platitude de P_2) $i \otimes 1_{P_1} \otimes 1_{P_2}$ l'est. Par une récurrence immédiate on en déduit le cas d'un produit tensoriel fini quelconque.

Si $(P_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de A-modules et $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ alors pour M' un sous-module de M on a $M' \otimes_A P = \bigoplus_{i\in I} M' \otimes_A P_i$ et $M \otimes_A P = \bigoplus_{i\in I} M \otimes_A P_i$ et $i \otimes \mathrm{id}_P$ est la somme directe des $i \otimes \mathrm{id}_{P_i}$ (c'est-à-dire l'application qui envoie une famille (x_i) presque nulle d'éléments de $M' \otimes_A P_i$ vers la famille $((i \otimes \mathrm{id}_{P_i})(x_i))$ de ses images par ces applications). Manifestement, pour qu'une application somme directe soit injective il faut et il suffit que chacune de ses composantes le soit, ce qui conclut. ✓

9. (†) Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs). Tout B-module M peut être considéré comme un A-module par la multiplication $a \bullet x = \varphi(a) \cdot x$ pour $a \in A$ et $x \in M$. Montrer l'équivalence entre (i) toute application A-linéaire $M \to N$ de B-modules est automatiquement B-linéaire, (ii) une quelconque des deux flèches $B \to B \otimes_A B$ (données par $b \mapsto 1 \otimes b$ et $b \mapsto b \otimes 1$) est un isomorphisme (auquel cas les deux coïncident) et (iii) pour n'importe quel B-module M, la flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ est un isomorphisme et les structures de B-module de $B \otimes_A M$ sont les mêmes pour la multiplication sur le facteur de gauche ou de droite.

Corrigé. Montrons que (i) implique (ii). On considère $B \otimes_A B$ comme un B-module par multiplication sur le facteur de gauche. La flèche $b \mapsto 1 \otimes b$ est A-linéaire par définition du produit tensoriel sur A ($a \otimes b = 1 \otimes ab$) : l'hypothèse (i) assure donc qu'elle est B-linéaire, c'est-à-dire en particulier (comme on a choisi de mettre sur $B \otimes_A B$ la structure correspondant à la multiplication sur le facteur de gauche) que $b \otimes b' = 1 \otimes bb'$ pour tous $b, b' \in B$. On peut donc dire que les flèches $B \to B \otimes_A B, b \mapsto 1 \otimes b$ et $B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$ sont des bijections réciproques et (ii) est prouvé.

Montrons à présent que (ii) implique (iii). La flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ se factorise en $M \to B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M \to B \otimes_A M$ où la première flèche est l'isomorphisme naturel $x \mapsto 1 \otimes x$, la deuxième est $b \otimes x \mapsto (1 \otimes b) \otimes x$, et la troisième est $(b \otimes b') \otimes x \mapsto b \otimes b'x$: cette fois, $B \otimes_A B$ a été considéré comme B-module par multiplication sur le facteur de droite. Mais l'hypothèse (ii) assure que $B \to B \otimes_A B$ et donc aussi $B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M$, est un isomorphisme. Donc $M \to B \otimes_A M$, en tant que composée d'isomorphismes, en est un, et comme les deux flèches $B \to B \otimes_A B$ coïncident les deux structures de B-module sur $B \otimes_A M$ coïncident aussi, ce qui démontre (iii).

Montrons enfin que (iii) implique (i) : d'une flèche A-linéaire $M \to N$ entre deux A-modules on déduit une flèche B-linéaire $1 \otimes f \colon B \otimes_A M \to B \otimes_A N$, qui d'après (iii) coïncide avec f elle-même modulo des isomorphismes naturels. Donc f est bien B-linéaire. ✓

10 (le foncteur Tor). Soit A un anneau (commutatif). Si N est un A-module, on définit un A-module $\mathcal{R}(N)$ appelé « module des relations » (ou : « premier module des syzygies ») de N : c'est l'ensemble des combinaisons formelles $\sum_i a_i[x_i]$ (avec $a_i \in A$, $x_i \in N$ et la somme finie ; les $[x_i]$ sont des symboles formels) telles que $\sum_i a_i x_i = 0$, avec l'addition terme à terme et la multiplication évidente par les éléments de A. Si on préfère, $\mathcal{R}(N)$ est le noyau de l'application naturelle du A-module libre de base N, soit $A^{(N)}$, vers N. Si P est un autre A-module, on définit le « produit de torsion » ou « produit Tor » de N et P, noté $N \circledast_A P$ (ou, de façon plus standard mais plus encombrante, $\mathrm{Tor}_A^1(N, P)$) comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(N) \otimes_A P$, disons $\sum_j (\sum_i a_{ij}[x_i]) \otimes y_j$, tels que $\sum_j a_{ij} y_j = 0$ pour tout i (i.e., qui s'annulent dans $P^{(N)}$).

(1) Calculer directement $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \circledast_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec cette définition.

(2) (†) Montrer que, contrairement aux apparences, $N \circledast_A P$ est symétrique en N et P (dans un sens à préciser).

(3) (‡) Montrer que si on a une suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules (rappelons que ceci signifie que l'image de chaque flèche est le noyau de la suivante ; en l'occurrence, que M' est un sous-module de M et que le quotient de M par M' est M'') alors on a une suite exacte $M' \circledast_A P \to M \circledast_A P \to M'' \circledast_A P \to M' \otimes_A P \to M \otimes_A P \to M'' \otimes_A P \to 0$.

Corrigé. (1) Les relations sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont manifestement $\mathcal{R}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\bar{0}] \oplus \mathbb{Z}(2[\bar{1}])$. Du coup, $\mathcal{R}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[\bar{0}] \otimes \bar{1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(2[\bar{1}]) \otimes \bar{1}$ et finalement on trouve que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \circledast_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ vaut $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec un générateur qui peut s'écrire $2[\bar{1}, \bar{1}]$.

(2) On est tenté d'envoyer l'élément $\sum_j (\sum_i a_{ij}[x_i]) \otimes y_j$ de $N \circledast_A P$ sur l'élément de $P \circledast_A N$ donné par $\sum_i (\sum_j a_{ij}[y_j]) \otimes x_i$. Reste à vérifier que c'est bien défini : tout d'abord, on a $\sum_i a_{ij} x_i = 0$ pour tout j (car les $\sum_i a_{ij}[x_i]$ sont censés appartenir à $\mathcal{R}(N)$ et $\sum_j a_{ij} y_j = 0$ pour tout i (par définition de $\mathcal{R}(N)$) ; mais il faut aussi vérifier que les conditions de bilinéarités sont bien vérifiées (attention cependant, car on définit une application linéaire sur un sous-espace du produit tensoriel) : or si $\sum_j b_j y_j = 0$, on envoie $(\sum_i a_i[x_i]) \otimes (\sum_j b_j y_j)$ (qui est nul dans $\mathcal{R}(N)$) sur $(\sum_j b_j[y_j]) \otimes (\sum_i a_i x_i)$ avec encore $\sum_i a_i x_i = 0$, donc sur zéro comme on voulait. On a bien obtenue la symétrie du produit Tor. Si on veut, on peut encore décire $N \circledast_A P$ de la façon symétrique suivante : on part de $A^{(N \times P)}$ (comme pour construire $N \otimes_A P$), on se restreint à la partie des (c_{xy}) tels que $\sum_x c_{xy} x = 0$ pour tout y et $\sum_y c_{xy} y = 0$ pour tout x, et on quotiente par le sous-module engendré par tous les c_{xy} de la forme $(a_x b_y)$ pour des a_x vérifiant $\sum_x a_x x = 0$ (une relation sur N, donc) et des b_y vérifiant $\sum_y b_y y = 0$ (une relation sur P).

(3) La suite exacte $M' \otimes_A P \to M \otimes_A P \to M'' \otimes_A P \to 0$ est déjà connue. Définissons une application A-linéaire de « connexion » $\delta \colon M'' \circledast_A P \to M' \otimes_A P$; en fait, on a tout fait pour : si on se donne $\sum_j (\sum_i a_{ij}[x_i]) \otimes y_j \in M'' \circledast_A P$, on relève les x_i arbitrairement en des $\hat{x}_i \in M$, et comme $\sum_i a_{ij} \hat{x}_i$ s'envoie sur 0 dans M'' pour tout j il provient d'un élément de M', qu'on notera également $\sum_i a_{ij} \hat{x}_i$, et on définit $\delta(\sum_j (\sum_i a_i[x_i]) \otimes y_j)$ comme $\sum_j (\sum_i a_{ij} \hat{x}_i) \otimes y_j$ dans $M' \otimes_A P$. Cette valeur ne dépend pas des choix des $\hat{x}_i$ car deux choix diffèrent par un élément de la forme $\sum_{i,j} a_{ij} t_i \otimes y_j$ qui est nul puisque $\sum_j a_{ij} y_j$ est nul pour tout i. Manifestement cet élément de $M' \otimes_A P$ s'envoie vers 0 dans $M \otimes_A P$.

Pour montrer que l'image de δ est précisément le noyau de $M' \otimes_A P \to M \otimes_A P$, on procède de la façon suivante. Soit $\tilde{M}''$ une partie de M (sans plus de structure que ça) contenant un et un seul représentant de chaque image dans M'' : la flèche $A^{(M' \cup \tilde{M}'')} \to M$ qui à une combinaison formelle $\sum a_i[x_i]$ avec chaque $x_i \in M' \cup \tilde{M}''$ est alors surjective, et on peut considérer $\tilde{\mathcal{R}}$ son noyau. Comme $0 \mapsto \tilde{\mathcal{R}} \to A^{(M' \cup \tilde{M}'')} \to M \to 0$ est exacte, $\tilde{\mathcal{R}} \otimes_A P \to P^{(M' \cup \tilde{M}'')} \to M \otimes_A P \to 0$ l'est aussi. Soit maintenant $\sum_{ij} a_{ij} x_i \otimes y_j \in M' \otimes_A P$ qui s'annule dans $M \otimes_A P$, alors $\sum_{ij} a_{ij} y_j [x_i]$ (vu dans $P^{(M')}$ donc dans $P^{(M' \cup \tilde{M}'')}$) provient d'un élément de $\tilde{\mathcal{R}} \otimes_A P$ d'après ce qu'on vient de dire, dont l'image dans $\mathcal{R}(M'') \otimes_A P$ est nulle dans $P^{(M'')}$, c'est-à-dire que c'est un élément de $M'' \circledast_A P$ qui par construction est celui qu'on cherche.

Le reste est du même acabit. Il faut avouer que c'est plus facile à faire avec de la vraie algèbre homologique... ✓

Motivations : L'exercice 1 est censé donner une idée de ce à quoi peuvent ressembler les produits tensoriels sur un anneau qui n'est pas un corps ($\mathbb{Z}$, ici, pour ne pas faire trop compliqué). L'exercice 2 tend à justifier la ressemblance entre produits tensoriels et applications linéaires : pour les espaces vectoriel de dimension finie c'est la même chose — si on dualise l'espace de départ. L'exercice 3 généralise trivialement le produit tensoriel pour considérer les applications multilinéaires en s variables. L'exercice 4 est plutôt taupinal (ou agrégatif). L'exercice 5 cherche à déterminer les produits tensoriels sur l'anneau des polynômes à une indéterminée. L'exercice 6, long mais censément peu difficile, devrait donner une idée d'un produit tensoriel en présence de relations plus compliquées (ici un module qui n'a pas de torsion en acquiert en passant au produit tensoriel). L'exercice 7 étudie le produit tensoriel avec le module des suites à valeurs dans l'anneau de base. L'exercice 8 introduit la notion de module plat et y démontre des sorites élémentaires. L'exercice 9 demande un maniement intensif de la propriété universelle et considérations formelles sur le produit tensoriel. L'exercice 10 introduit le produit Tor, qui est le « foncteur dérivé » du produit tensoriel (et en mesure le défaut d'exactitude à gauche).