1. Calculer les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ de deux quelconques des groupes abéliens (autrement dit, $\mathbb{Z}$-modules) parmi : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n un naturel non nul variable), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Plus généralement, on pourra décrire le produit tensoriel d'un groupe abélien $\mathbb{Z}$ quelconque avec l'un de ces groupes.)

2. Soient U et V deux espaces vectoriels (sur un corps k). On note $U^\vee = \mathrm{Hom}_k(U, k)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi\colon U^\vee \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs purs (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^\vee$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

3 (applications multilinéaires). Soit A un anneau (commutatif) et $M_1, \ldots, M_s, N$ des A-modules. On dit qu'une application $M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ est A-s-linéaire (ou, de façon moins précise, A-multilinéaire) lorsque chacune des applications partielles est A-linéaire. Montrer qu'il existe un A-module P et une application A-s-linéaire $\varpi\colon M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ tels que toute application A-s-linéaire $f\colon M_1 \times \cdots \times M_s \to N$ se factorise de façon unique en $f = \tilde{f}\varpi$ où $\tilde{f}\colon P \to N$ est A-linéaire. Montrer que P est unique à isomorphisme (commutant aux ϖ) vérifiant cette propriété.

4. Soient U et V deux espaces vectoriels de dimensions finies m et n respectivement sur un corps k. Soient $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$ des endomorphismes (k-linéaires). Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_{f\otimes g}$ de $f \otimes g\colon U \otimes_k V \to U \otimes_k V$ est une fonction polynomiale des polynômes caractéristiques χ_f et χ_g de f et g.

5. Soit k un corps : on note $k[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k en l'indéterminée t. Expliquer pourquoi se donner un $k[t]$-module équivaut à se donner un k-espace vectoriel U muni d'une application linéaire $f\colon U \to U$. Sous cette identification, décrire le produit tensoriel $U \otimes_{k[t]} V$ sur $k[t]$ de deux k-espaces vectoriels U et V munis d'endomorphismes $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$.

6. Soit k un corps, et $A = k[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées x et y sur k (on rappelle qu'il est factoriel). Soit $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal de A engendré par x et y — qu'on verra notamment comme un A-module. Pour éviter les confusions, on notera $\mathfrak{m}^{\oplus 2} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ la somme directe (= le produit direct) de deux copies de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ l'idéal produit de $\mathfrak{m}$ avec lui-même. Le but de l'exercice est de déterminer le produit tensoriel $\mathfrak{m}^{\otimes 2} = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}$ avec lui-même au-dessus de A.

(1) On considère $\varphi\colon A^{\oplus 2} \to \mathfrak{m}$ défini par $\varphi(f, g) = fx + gy$. Expliquer pourquoi φ est surjective et montrer que son noyau est l'image d'une application A-linéaire $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}$ injective à préciser.

(2) En déduire que $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ peut se décrire comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module isomorphe à $\mathfrak{m}$ que l'on précisera. On appellera $\varphi_{\mathfrak{m}}$ la surjection $\mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ ainsi définie.

(3) Soit $\mu\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ défini par $\mu(m \otimes m') = mm'$: quelle est l'image de μ ? Quelle est la composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$?

(4) Soit $\Delta = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Montrer que $\mu(\Delta) = 0$ et $\Delta \neq 0$.

(5) Montrer que tout élément du noyau $\ker \mu$ de μ s'écrit de la forme $t\Delta$ pour un $t \in k$: on pourra montrer pour $d \in \ker \mu$ que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$.

(6) Définir une application A-linéaire (non canonique) $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ telle que la composée $\mu\lambda$ soit l'identité.

(7) Conclure quant à la structure de $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ en tant que A-module.

7. On note $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers dont presque tous les termes (c'est-à-dire : tous sauf un nombre fini) sont nuls, et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le groupe abélien de toutes les suites d'entiers. Expliciter $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et les comparer à $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

(†) De façon plus générale, montrer que si M est un groupe abélien, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ s'identifie à un sous-groupe de $M^{\mathbb{N}}$ (propre en général) et le décrire.

(‡) Donner un exemple d'anneau (commutatif) A et de module M sur A tel que l'application linéaire naturelle $M \otimes_A A^{\mathbb{N}} \to M^{\mathbb{N}}$ ne soit même pas injective. Montrer par un exemple que l'application Φ définie de façon analogue à celle de l'exercice 2, mais pour des modules sur un anneau (commutatif) au lieu des espaces vectoriels, peut ne pas être injective.

8 (modules plats). Un module P sur un anneau (commutatif) A est dit *plat* lorsque pour tout A-module M et tout sous-module M' de A, en notant $i\colon M' \to M$ l'injection canonique, l'application A-linéaire $i \otimes \mathrm{id}_P\colon M' \otimes_A P \to M \otimes_A P$ est injective. Montrer qu'un module libre est plat, qu'un produit tensoriel (fini) de modules plats est plat, et qu'une somme directe (finie ou infinie) est plate si et seulement si chacun des termes est plat.

9. (†) Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs). Tout B-module M peut être considéré comme un A-module par la multiplication $a \bullet x = \varphi(a) \cdot x$ pour $a \in A$ et $x \in M$. Montrer l'équivalence entre (i) toute application A-linéaire $M \to N$ de B-modules est automatiquement B-linéaire, (ii) une quelconque des deux flèches $B \to B \otimes_A B$ (données par $b \mapsto 1 \otimes b$ et $b \mapsto b \otimes 1$) est un isomorphisme (auquel cas les deux coïncident) et (iii) pour n'importe quel B-module M, la flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ est un isomorphisme et les structures de B-module de $B \otimes_A M$ sont les mêmes pour la multiplication sur le facteur de gauche ou de droite.

10 (le foncteur Tor). Soit A un anneau (commutatif). Si N est un A-module, on définit un A-module $\mathcal{R}(N)$ appelé « module des relations » (ou : « premier module des syzygies ») de N : c'est l'ensemble des combinaisons formelles $\sum_i a_i[x_i]$ (avec $a_i \in A$, $x_i \in N$ et la somme finie ; les $[x_i]$ sont des symboles formels) telles que $\sum_i a_i x_i = 0$, avec l'addition terme à terme et la multiplication évidente par les éléments de A. Si on préfère, $\mathcal{R}(N)$ est le noyau de l'application naturelle du A-module libre de base N, soit $A^{(N)}$, vers N. Si P est un autre A-module, on définit le « produit de torsion » ou « produit Tor » de N et P, noté $N \circledast_A P$ (ou, de façon plus standard mais plus encombrante, $\mathrm{Tor}_A^1(N, P)$) comme l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}(N) \otimes_A P$, disons $\sum_j (\sum_i a_{ij}[x_i]) \otimes y_j$, tels que $\sum_j a_{ij} y_j = 0$ pour tout i (i.e., qui s'annulent dans $P^{(N)}$).

(1) Calculer directement $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \circledast_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec cette définition.

(2) (†) Montrer que, contrairement aux apparences, $N \circledast_A P$ est symétrique en N et P (dans un sens à préciser).

(3) (‡) Montrer que si on a une suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules (rappelons que ceci signifie que l'image de chaque flèche est le noyau de la suivante ; en l'occurrence, que M' est un sous-module de M et que le quotient de M par M' est M'') alors on a une suite exacte $M' \circledast_A P \to M \circledast_A P \to M'' \circledast_A P \to M' \otimes_A P \to M \otimes_A P \to M'' \otimes_A P \to 0$.

Motivations : L'exercice 1 est censé donner une idée de ce à quoi peuvent ressembler les produits tensoriels sur un anneau qui n'est pas un corps ($\mathbb{Z}$, ici, pour ne pas faire trop compliqué). L'exercice 2 tend à justifier la ressemblance entre produits tensoriels et applications linéaires : pour les espaces vectoriel de dimension finie c'est la même chose — si on dualise l'espace de départ. L'exercice 3 généralise trivialement le produit tensoriel pour considérer les applications multilinéaires en s variables. L'exercice 4 est plutôt taupinal (ou agrégatif). L'exercice 5 cherche à déterminer les produits tensoriels sur l'anneau des polynômes à une indéterminée. L'exercice 6, long mais censément peu difficile, devrait donner une idée d'un produit tensoriel en présence de relations plus compliquées (ici un module qui n'a pas de torsion en acquiert en passant au produit tensoriel). L'exercice 7 étudie le produit tensoriel avec le module des suites à valeurs dans l'anneau de base. L'exercice 8 introduit la notion de module plat et y démontre des sorites élémentaires. L'exercice 9 demande un maniement intensif de la propriété universelle et considérations formelles sur le produit tensoriel. L'exercice 10 introduit le produit Tor, qui est le « foncteur dérivé » du produit tensoriel (et en mesure le défaut d'exactitude à gauche).