1 (de l'examen 2005). (a) Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, et $u\colon G \to L^\times$ une application à valeurs dans le groupe multiplicatif telle que : $u(gh) = u(g)\, g(u(h))$ $(\forall g, h \in G)$. Montrer qu'il existe un élément non nul $v \in L^\times$ tel que : $u(h) = v\, h(v)^{-1}$ $(\forall h \in G)$. (On pourra chercher v sous la forme $v = \sum_{g\in G} u(g)\, g(w)$ pour un $w \in L$ bien choisi.)

(b) On suppose de plus que G est cyclique d'ordre n, engendré par h. Soit $x \in L$ tel que $x\, h(x)\, h^2(x) \cdots h^{n-1}(x) = 1$. Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $x = y\, h(y)^{-1}$.

(c) On revient à la situation du (a) (G n'est pas nécessairement cyclique). Soit $\phi\colon G \to L$ une application telle que $\phi(gh) = \phi(g) + g(\phi(h))$ $(\forall g, h \in G)$. Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $\phi(g) = c - g(c)$ $(\forall g \in G)$. (On pourra montrer qu'il existe w tel que $\sum_{g\in G} g(w) = 1$.)

(d) On suppose à nouveau G cyclique d'ordre n, de générateur h. Soit $x \in L$ tel que $x + h(x) + \cdots + h^{n-1}(x) = 0$. Montrer qu'il existe $z \in L$ tel que $x = z - h(z)$.

(e) On suppose que le corps K est de caractéristique $p \neq 0$ et que $K \subseteq L$ est une extension cyclique de degré p. Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $L = K(c)$ et $c^p - c \in K$.

Corrigé. (a) Suivant la suggestion de l'énoncé, posons $v = \sum_{h\in G} u(h)\, h(w)$, pour un $w \in L$ restant à déterminer. Pour $g \in G$, on a alors $g(v) = \sum_{h\in G} g(u(h))\, g(h(w))$, et d'après la propriété (dite « de cocycle ») vérifiée par u on a $g(u(h)) = u(g)^{-1}\, u(gh)$, donc $g(v) = u(g)^{-1} \sum_{h\in G} u(gh)\,(gh)(w) = u(g)^{-1} \sum_{h\in G} u(h)\, h(w)$, ce qui prouvera $u(g) = v\, g(v)^{-1}$ (comme souhaité) dès lors qu'on aura $v \neq 0$ (et donc $g(v) \neq 0$ pour tout g). Il reste donc à expliquer pourquoi on peut trouver w tel que $\sum_{g\in G} u(g)\, g(w)$ soit non nul ; mais si cette expression était nulle pour tout $w \in L$, l'indépendance linéaire des caractères (théorème de Dirichlet) montrerait que $u(g) = 0$ (pour tout g) ce qui est contraire à l'hypothèse.

(b) On va définir un $u\colon G \to L^\times$ vérifiant les hypothèses de la question (a). Précisément, on pose, pour k entre 0 et $n-1$, $u(h^k) = x\, h(x) \cdots h^{k-1}(x)$ (ce produit est non nul, puisque manifestement $x \neq 0$). On vérifie aisément, d'après l'hypothèse faite sur x, que u vérifie la condition « de cocycle », $u(gg') = u(g)\, g(u(g'))$. La conclusion de la question (a) permet d'affirmer qu'il existe $y \in L^\times$ tel que $x = u(h) = y\, h(y)^{-1}$, ce qu'on voulait.

(c) Montrons d'abord qu'il existe un $w \in L$ tel que $\sum_{g\in G} g(w) = 1$: cela découle de nouveau de l'indépendance linéaire des caractères, puisqu'on ne peut pas avoir $\sum_{g\in G} g(w) = 0$ pour tout $w \in L$, donc il doit exister w avec $\operatorname{tr}(w) := \sum_{g\in G} g(w) \neq 0$, et cette quantité $\operatorname{tr}(w)$ est dans K (car invariante par tout élément de G), et quitte à diviser w par elle on est ramené à $\sum_{g\in G} g(w) = 1$. Posons maintenant $c = \sum_{h\in G} \phi(h)\, h(w)$: on a alors, en raisonnant de façon analogue à la question (a), $g(c) = -\phi(g) \sum_{h\in G} h(w) + \sum_{h\in G} \phi(gh)\,(gh)(w) = -\phi(g) + c$, donc $\phi(g) = c - g(c)$ comme annoncé.

(d) Le raisonnement est rigoureusement analogue à la question (b). On définit un $\phi\colon G \to L$ vérifiant les hypothèses de la question (c). Précisément, on pose, pour k entre 0 et $n-1$, $\phi(h^k) = x + h(x) + \cdots + h^{k-1}(x)$. On vérifie aisément, d'après l'hypothèse faite sur x, que u vérifie la condition « de cocycle », $\phi(gg') = \phi(g) + g(\phi(g'))$. La conclusion de la question (c) permet d'affirmer qu'il existe $z \in L$ tel que $x = \phi(h) = z - h(z)$, ce qu'on voulait.

(e) Soit h un générateur du groupe de Galois G de L sur K, supposé cyclique d'ordre p. La conclusion de la question (d) appliquée à $x = 1$ (qui vérifie manifestement l'hypothèse de cette question, $n = 0$ dans L) permet d'affirmer qu'il existe $c \in L$ tel que $c - h(c) = 1$. Dans ces conditions, on a $c^p - h(c^p) = (c - h(c))^p = 1$ puisque L est de caractéristique p, soit $h(c^p - c) = c^p - c$, donc $c^p - c \in K$. D'autre part, manifestement $c \notin K$ (étant donné que $h(c) \neq c$), et l'extension $K(c)$ de K, contenue dans L et de degré > 1 sur K, ne peut donc être que L. Ceci termine la démonstration. ✓

2 (de l'examen 2005). Soit k un corps, $V \subseteq k^n$ et $W \subseteq k^m$ des variétés non vides. On désigne par $A(V)$ et $A(W)$ les algèbres de fonctions polynomiales sur V et W, et par $I(V) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ et $I(W) \subseteq k[Y_1, \ldots, Y_m]$ les idéaux annulateurs.

(a) Montrer que $V \times W \subseteq k^{n+m}$ est une variété, et que l'application naturelle donnée par le produit des fonctions détermine un morphisme d'algèbres $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$.

(b) On suppose que V et W sont irréductibles. Montrer que $V \times W$ est irréductible.

(c) Montrer que l'idéal $(I(V), I(W))$ de $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$, engendré par $I(V)$ et $I(W)$ est l'idéal annulateur de $V \times W$ et que $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$ est un isomorphisme.

Corrigé. (a) Puisque V est un fermé de Zariski, on peut écrire $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n : (\forall f \in I(V))\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ et de façon analogue pour W. Alors $V \times W$ est l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in k^{n+m}$ tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $f \in I(V)$ (qu'on peut voir comme élément de $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ ne dépendant pas des y_j) et $g(y_1, \ldots, y_m) = 0$ pour tout $g \in I(W)$. Ceci montre encore que $V \times W$ est la variété définie dans k^{n+m} par l'idéal $(I(V), I(W))$ engendré par $I(V)$ et $I(W)$ dans $k[\underline{X}, \underline{Y}]$ (on a ainsi abrégé $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$).

En particulier, $I(V \times W) \supseteq (I(V), I(W))$ (pour l'inclusion réciproque, voir la question (c)), et il y a donc une application naturelle surjective (réduction) de $k[\underline{X}, \underline{Y}]/(I(V), I(W))$ vers $A(X \times Y) = k[\underline{X}, \underline{Y}]/I(V \times W)$. Par ailleurs, le produit entre $A(V) = k[\underline{X}]/I(V)$ et $A(W) = k[\underline{Y}]/I(W)$ définit (par le théorème chinois) un isormorphisme entre $A(V) \otimes_k A(W)$ et $k[\underline{X}, \underline{Y}]/(I(V), I(W))$. En composant ces deux morphismes, on a donc un morphisme (surjectif) $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$ donné par la multiplication.

(b) Constatons d'abord le fait suivant : si Z est un fermé de Zariski dans $V \times W$, alors l'ensemble $Z^\forall$ des $\underline{x} \in V$ tels que $(\underline{x}, \underline{y}) \in Z$ pour tout $\underline{y} \in W$ est un fermé de Zariski de V (dit autrement, l'application de projection sur la première coordonnée $V \times W \to V$ est une application *ouverte*). C'est clair car $Z^\forall$ peut se définir comme l'ensemble des $\underline{x} \in k^n$ tels que $f(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ pour tout $\underline{y} \in W$, et pour chaque $\underline{y} \in W$ donné ceci définit un fermé $Z^{\underline{y}}$ de V, et on prend l'intersection de tous ces fermés. Supposons maintenant que Z et Z' soient deux fermés de Zariski stricts de $V \times W$, où V et W sont supposés irréductibles : dire que $Z \neq V \times W$ signifie exactement $Z^\forall \neq V$, et de même $Z'^\forall \neq V$; comme ce sont deux fermés de Zariski (d'après la remarque qu'on vient de faire), leur réunion n'est pas V tout entier (ce dernier étant irréductible), donc il existe $\underline{x} \in V$ non contenu dans $Z^\forall$ ni dans $Z'^\forall$, et alors les fermés de Zariski $Z_{\underline{x}} = \{\underline{y} \in W : (\underline{x}, \underline{y}) \in Z\}$ et $Z'_{\underline{x}}$ (défini de façon analogue) de W ne sont pas W tout entier, donc leur réunion n'est pas W tout entier (ce dernier étant irréductible), et si $\underline{y}$ n'est pas dans cette réunion, alors le couple $(\underline{x}, \underline{y})$ n'est pas dans $Z \cup Z'$. On a donc prouvé l'irréductibilité de $V \times W$.

(c) Comme on l'a signalé en (a), l'idéal annulateur $I(V \times W)$ contient au moins l'idéal $(I(V), I(W))$ engendré par $I(V)$ et $I(W)$ dans $k[\underline{X}, \underline{Y}]$. Considérons maintenant $f \in I(V \times W) \subseteq k[\underline{X}, \underline{Y}]$. On en déduit un élément $\bar{f}$ de $A(V)[\underline{Y}]$. Notons $b_1, \ldots, b_s$ une k-base de $A(V)$ ou du moins du sous-k-espace vectoriel engendré dans celui-ci par les coefficients de $\bar{f} \in A(V)[\underline{Y}]$, et écrivons $\bar{f} = b_1 f_1 + \cdots + b_s f_s$ avec $f_1, \ldots, f_s \in k[\underline{Y}]$ (uniquement déterminés). Vu dans $A(V)$ on a $\bar{f}(\underline{y}) = 0$ pour tout $\underline{y} \in W$, donc $b_1 f_1(\underline{y}) + \cdots + b_s f_s(\underline{y}) = 0$, d'où il résulte $f_i(\underline{y}) = 0$ pour tout i, ce qui donne $f_i \in I(W)$. Comme alors la différence $f - (b_1 f_1 + \cdots + b_s f_s)$ a une image nulle dans $A(V)[\underline{Y}]$, chacun de ses coefficients (dans les variables Y) est un élément de $I(V)$. En mettant tout cela ensemble, on a bien prouvé $f \in (I(V), I(W))$, et, le choix de f étant arbitraire, $I(V \times W) = (I(V), I(W))$. D'après ce qui a déjà été dit, $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$ est alors un isomorphisme. ✓

3 (de l'examen 2006). Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de V, supposé linéaire en la deuxième variable. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et de sous-espace de vecteurs invariants l'orthogonal de e_i. On appelle W le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les s_i.

(i) Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.

(ii) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k(V)$ invariant par W est nul. (On pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, et en décomposant V comme somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal.)

(ii) On suppose que W est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$*\sum_{w \in W} \det(A - w) = \mathrm{card}(W) \cdot \det(A)$

$*\sum_{w \in W} \det(\mathrm{id} - Aw) = \mathrm{card}(W)$

En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$ il existe $w \in W$ tel que Aw n'ait aucun point fixe non nul.

Corrigé. (i) Pour tout $x \in V$, on a $s_i(x) = x + \gamma_i \langle e_i, x \rangle e_i$, où $\gamma_i = \frac{c_i - 1}{\|e_i\|^2}$: il suffit de vérifier cette formule pour $x = e_i$ et pour x orthogonal à e_i, les deux cas étant clairs d'après la définition. Le fait que s_i soit supposée unitaire équivaut à $|c_i| = 1$.

(ii) Tout d'abord, un $w \in W$ agit sur $\bigwedge^k V$ en envoyant $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ sur $w(v_1) \wedge \cdots \wedge w(v_k)$. Dire qu'un élément est invariant par W signifie simplement qu'il est invariant par tous les s_i.

Écrivons $V = V' \oplus \mathbb{C}q$, où $V' = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_{n-1}$ est le sous-espace vectoriel engendré par les $n-1$ premiers vecteurs de la base, et q un vecteur orthogonal à V'. On peut alors décomposer $\bigwedge^k V$ en $\bigwedge^k V' \oplus (q \wedge \bigwedge^{k-1} V')$ — où le second terme est à comprendre comme l'ensemble des éléments de la forme $q \wedge z$ avec $z \in \bigwedge^{k-1} V'$ (qui est alors uniquement défini). Supposons maintenant $\tau \in \bigwedge^k V$, et soit $\tau = \tau' + q \wedge \tau''$ sa décomposition comme on vient de l'expliquer, où $\tau' \in \bigwedge^k V'$ et $\tau'' \in \bigwedge^{k-1} V'$. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on a $s_i(\tau) = s_i(\tau') + q \wedge s_i(\tau'')$ (puisque q est invariant par s_i). Si on suppose τ invariant par $s_1, \ldots, s_n$, on voit alors que τ' et τ'' sont invariants par la restriction de $s_1, \ldots, s_{n-1}$ à V' : en procédant par récurrence sur n (l'hypothèse de récurrence portant sur tout $k \geq 1$), on peut donc supposer $\tau' = 0$, et $\tau'' = 0$ sauf dans le cas où $k = 1$. Il n'y a donc plus que ce seul cas à traiter : on a alors $\tau = \lambda q \in V$ orthogonal à $e_1, \ldots, e_{n-1}$, mais l'invariance par s_n (et le fait que $c_n \neq 1$) montre qu'on a aussi $\tau \perp e_n$. Donc τ ne peut être que nul.

(iii) Soient $v_1, \ldots, v_n$ des éléments quelconques de V : si on développe complètement $(v_1 - w(e_1)) \wedge \cdots \wedge (v_n - w(e_n))$, l'un des termes est $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$, et tous les autres peuvent s'écrire comme $\pm \tau_w \wedge \mu$, où τ_w est de la forme $w(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge w(e_{i_k}) \in \bigwedge^k V$ avec $k \geq 1$ et μ est dans $\bigwedge^{n-k} V$ et indépendant de w ; or si on somme sur tous les $w \in W$, le facteur τ_w donne une somme $\sum_{w \in W} \tau_w$ invariante par l'action de W, donc nulle d'après la question (i), donc $\sum_{w \in W} \tau_w \wedge \mu = 0$ aussi. Ceci prouve que $\sum_{w \in W} (v_1 - w(e_1)) \wedge \cdots \wedge (v_n - w(e_n)) = \mathrm{card}(W) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ (tous les autres termes s'annulent ainsi qu'on vient de le voir) : c'est exactement la première formule qu'il s'agissait de prouver (avec $v_i = A(e_i)$). Pour ce qui est de la seconde, on peut par exemple remarquer qu'elle découle de la première lorsque A est inversible (de $\sum_{w \in W} \det(A^{-1} - w) = \mathrm{card}(W) \cdot \det(A^{-1})$ on déduit $\sum_{w \in W} \det(\mathrm{id} - Aw) = \mathrm{card}(W)$ en multipliant par $\det(A)$), et, comme il s'agit d'une égalité entre fonctions polynomiales, l'égalité sur une partie dense (les matrices inversibles) suffit à conclure.

Enfin, si Aw avait un point fixe non nul pour tout $w \in W$, cela voudrait dire que le noyau de $\mathrm{id} - Aw$ n'est jamais réduit à $\{0\}$, donc $\det(\mathrm{id} - Aw) = 0$ toujours, ce qui contredit la seconde formule qu'on vient de prouver. ✓

4 (sur la dualité de Schur-Weyl). On s'intéresse au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur trois objets et à ses représentations complexes.

(1) On appelle $V_s = \mathbb{C}$ muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_3$, $V_a = \mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_3$ par (multiplication par) la signature, et $V_r = \mathbb{C}^2$ vu comme l'hyperplan $x + y + z = 0$ de $\mathbb{C}^3$ sur lequel $\mathfrak{S}_3$ opère par permutation des trois coordonnées. Montrer qu'on a ainsi défini trois représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ et que ce sont, à isomorphisme près, les seules : expliciter l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ comme un produit d'algèbres simples.

(2) On définit les éléments suivants de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$:

$$\begin{aligned} e_s &= \tfrac{1}{6}(1 + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)) \\ e_a &= \tfrac{1}{6}(1 - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)) \\ e'_r &= \tfrac{1}{3}(1 + (12) - (13) - (132)) \\ e''_r &= \tfrac{1}{3}(1 - (12) + (13) - (123)) \end{aligned}$$

Que valent tous les produits de deux quelconques de ces éléments, et que vaut leur somme ?

(3) Soit U un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d finie. On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur $U^{\otimes 3}$ de la façon usuelle ($\sigma \cdot (u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes u_{\sigma^{-1}(2)} \otimes u_{\sigma^{-1}(3)}$). Comment décrire l'image de e_s pour cette action (c'est-à-dire l'image de $\rho(e_s)$ dans $U^{\otimes 3}$, où ρ est la représentation qu'on vient d'introduire), et quelle est sa dimension ? Même question pour e_a. En déduire la dimension de l'image de e'_r et de e''_r.

(4) On suppose toujours que U est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d finie, et on fait agir $GL(U)$ sur $U^{\otimes 3}$ de la façon usuelle (on envoie $f \in GL(U)$ sur $f^{\otimes 3} \in GL(U^{\otimes 3}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U^{\otimes 3})$). Expliciter une écriture $U^{\otimes 3} \cong (U_s \otimes_{\mathbb{C}} V_s) \oplus (U_a \otimes_{\mathbb{C}} V_a) \oplus (U_r \otimes_{\mathbb{C}} V_r)$, compatible aux actions de $\mathfrak{S}_3$ et de $GL(U)$, où U_s, U_a, U_r sont munis d'une action triviale de $\mathfrak{S}_3$ et d'une action de $GL(U)$ à préciser, et où V_r, V_a, V_r sont munis de l'action de $\mathfrak{S}_3$ déjà précisée et de l'action triviale de $GL(U)$.

En déduire la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U^{\otimes 3})$ par (l'image de) $GL(U)$.

Corrigé. (1) Le fait que V_s et V_a soient irréductibles est évident. Pour montrer que V_r l'est aussi, il suffit de constater qu'elle n'a aucune droite vectorielle stable par l'action de $\mathfrak{S}_3$, ce qui est clair.

On en déduit un morphisme d'algèbres $\varphi: \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_s) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_a) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_r) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en envoyant un élément $g \in \mathfrak{S}_3$ sur son action sur les trois espaces vectoriels V_s (triviale), V_a (la signature de g) et V_r. On constate que φ est bijectif : soit en appliquant le théorème de Burnside pour avoir la surjectivité et en comparant les dimensions ($6 = 1+1+2^2$), soit en écrivant explicitement sa matrice. Ainsi, $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

(2) On vérifie, soit en développant, soit en considérant l'action sur V_s, V_a et V_r d'après la question précédente, que ces quatre éléments sont idempotents orthogonaux (i.e., le carré de l'un quelconque d'entre eux est lui-même, et le produit de deux distincts, dans n'importe quel ordre, est nul). Enfin, on a $e_s + e_a + e'_r + e''_r = 1$.

(3) L'image de e_s est, par construction, l'ensemble des tenseurs totalement symétriques dans $U^{\otimes 3}$, qu'on peut identifier à $\mathcal{S}^3(U)$ (la puissance symétrique troisième de U) puisque le corps de base ($\mathbb{C}$) est de caractéristique nulle. Sa dimension est $\binom{d+2}{3} = \frac{1}{6}(d^3 + 3d^2 + 2d)$. L'image de e_a est, quant à elle, l'ensemble des tenseurs alternés (= totalement antisymétriques), qu'on peut identifier à $\bigwedge^3(U)$, et sa dimension est $\binom{d}{3} = \frac{1}{6}(d^3 - 3d^2 + 2d)$.

D'après la question précédente, on a $U^{\otimes 3} = \mathrm{im}(e_s) \oplus \mathrm{im}(e_a) \oplus \mathrm{im}(e'_r) \oplus \mathrm{im}(e''_r)$ (ceci vaut pour toute représentation, pas spécialement pour $U^{\otimes 3}$), chacun de ces éléments étant un projecteur sur son image. Mais comme e'_r et e''_r sont conjugués, ils ont des images de même dimension, donc la dimension de l'image de e'_r, resp. e''_r, est $\frac{1}{3}(d^3 - d)$.

(4) On appelle U_s l'espace vectoriel image de e_s (dans $U^{\otimes 3}$), c'est-à-dire abstraitement $\mathcal{S}^3(U)$ comme on l'a vu, muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_3$ et de l'action de $GL(U)$ restriction de celle sur $U^{\otimes 3}$ (ceci a un sens car l'action de $GL(U)$ sur $U^{\otimes 3}$ commute à celle de $\mathfrak{S}_3$ donc laisse l'image de e_s invariante ; par ailleurs, c'est l'action usuelle de $GL(U)$ sur $\mathcal{S}^3(U)$). Bien sûr, $U_s \otimes V_s$ peut s'identifier à la même chose (puisque V_s est un espace vectoriel de dimension 1 muni d'actions triviales). On définit de même U_a comme l'image de e_a, mais munie de l'action triviale de $\mathfrak{S}_3$ (et *non* l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur l'image de e_a) : c'est encore $\bigwedge^3(U)$ comme on l'a vu (et encore une fois avec l'action usuelle de $GL(U)$ sur celui-ci) ; quant à $U_a \otimes V_a$, il se voit lui aussi comme l'image de e_a, mais avec l'action de $\mathfrak{S}_3$ induite par celle sur $U^{\otimes 3}$, c'est-à-dire la signature. Enfin, on définit U_r comme l'image de e'_r avec l'action triviale de $\mathfrak{S}_3$ et l'action de $GL(U)$ qui vient de celle sur $U^{\otimes 3}$ (de nouveau, l'image de e'_r est stable par l'action de $GL(U)$) : alors l'image de $e'_r + e''_r$ (qui est un idempotent central de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ représentant la projection sur le facteur $\mathbb{M}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_r)$) dans $U^{\otimes 3}$ s'identifie à $U_r \otimes V_r$.

Or le théorème de Schur-Weyl implique que le commutant dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U^{\otimes 3})$ de $A = \mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ est précisément le sous-espace vectoriel B engendré par $GL(U)$ (c'est une algèbre semisimple), et le théorème du bicommutant décrit cette algèbre comme $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U_s) \otimes 1_{V_s}) \times (\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U_a) \otimes 1_{V_a}) \times (\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U_r) \otimes 1_{V_r})$. Comme on a vu que $\dim_{\mathbb{C}} U_s = \frac{1}{6}(d^3 + 3d^2 + 2d)$, $\dim_{\mathbb{C}} U_a = \frac{1}{6}(d^3 - 3d^2 + 2d)$ et $\dim_{\mathbb{C}} U_r = \frac{1}{3}(d^3 - d)$, on en déduit $\dim_{\mathbb{C}} B$, qui est la somme des carrés de ces trois quantités, soit $\frac{1}{6}\, d^2(d^4 + 3d^2 + 2)$. ✓