1 (de l'examen 2005). (a) Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, et $u\colon G \to L^\times$ une application à valeurs dans le groupe multiplicatif telle que : $u(gh) = u(g)\, g(u(h))$ $(\forall g, h \in G)$. Montrer qu'il existe un élément non nul $v \in L^\times$ tel que : $u(h) = v\, h(v)^{-1}$ $(\forall h \in G)$. (On pourra chercher v sous la forme $v = \sum_{g \in G} u(g)\, g(w)$ pour un $w \in L$ bien choisi.)

(b) On suppose de plus que G est cyclique d'ordre n, engendré par h. Soit $x \in L$ tel que $x\, h(x)\, h^2(x) \cdots h^{n-1}(x) = 1$. Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $x = y\, h(y)^{-1}$.

(c) On revient à la situation du (a) (G n'est pas nécessairement cyclique). Soit $\phi\colon G \to L$ une application telle que $\phi(gh) = \phi(g) + g(\phi(h))$ $(\forall g, h \in G)$. Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $\phi(g) = c - g(c)$ $(\forall g \in G)$. (On pourra montrer qu'il existe w tel que $\sum_{g \in G} g(w) = 1$.)

(d) On suppose à nouveau G cyclique d'ordre n, de générateur h. Soit $x \in L$ tel que $x + h(x) + \cdots + h^{n-1}(x) = 0$. Montrer qu'il existe $z \in L$ tel que $x = z - h(z)$.

(e) On suppose que le corps K est de caractéristique $p \neq 0$ et que $K \subseteq L$ est une extension cyclique de degré p. Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $L = K(c)$ et $c^p - c \in K$.

2 (de l'examen 2005). Soit k un corps, $V \subseteq k^n$ et $W \subseteq k^m$ des variétés non vides. On désigne par $A(V)$ et $A(W)$ les algèbres de fonctions polynomiales sur V et W, et par $I(V) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ et $I(W) \subseteq k[Y_1, \ldots, Y_m]$ les idéaux annulateurs.

(a) Montrer que $V \times W \subseteq k^{n+m}$ est une variété, et que l'application naturelle donnée par le produit des fonctions détermine un morphisme d'algèbres $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$.

(b) On suppose que V et W sont irréductibles. Montrer que $V \times W$ est irréductible.

(c) Montrer que l'idéal $(I(V), I(W))$ de $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$, engendré par $I(V)$ et $I(W)$ est l'idéal annulateur de $V \times W$ et que $A(V) \otimes_k A(W) \to A(V \times W)$ est un isomorphisme.

3 (de l'examen 2006). Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de V, supposé linéaire en la deuxième variable. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et de sous-espace de vecteurs invariants l'orthogonal de e_i. On appelle W le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les s_i.

(i) Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.

(ii) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k(V)$ invariant par W est nul. (On pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, et en décomposant V comme somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal.)

(ii) On suppose que W est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$*\sum_{w \in W} \det(A - w) = \mathrm{card}(W) \cdot \det(A)$

$*\sum_{w \in W} \det(\mathrm{id} - Aw) = \mathrm{card}(W)$

En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$ il existe $w \in W$ tel que Aw n'ait aucun point fixe non nul.

4 (sur la dualité de Schur-Weyl). On s'intéresse au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur trois objets et à ses représentations complexes.

(1) On appelle $V_s = \mathbb{C}$ muni de l'action triviale de $\mathfrak{S}_3$, $V_a = \mathbb{C}$ muni de l'action de $\mathfrak{S}_3$ par (multiplication par) la signature, et $V_r = \mathbb{C}^2$ vu comme l'hyperplan $x + y + z = 0$ de $\mathbb{C}^3$ sur lequel $\mathfrak{S}_3$ opère par permutation des trois coordonnées. Montrer qu'on a ainsi défini trois représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ et que ce sont, à isomorphisme près, les seules : expliciter l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ comme un produit d'algèbres simples.

(2) On définit les éléments suivants de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$:

$$
\begin{aligned}
e_s &= \tfrac{1}{6}(1 + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)) \\
e_a &= \tfrac{1}{6}(1 - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)) \\
e'_r &= \tfrac{1}{3}(1 + (12) - (13) - (132)) \\
e''_r &= \tfrac{1}{3}(1 - (12) + (13) - (123))
\end{aligned}
$$

Que valent tous les produits de deux quelconques de ces éléments, et que vaut leur somme ?

(3) Soit U un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d finie. On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur $U^{\otimes 3}$ de la façon usuelle ($\sigma \cdot (u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes u_{\sigma^{-1}(2)} \otimes u_{\sigma^{-1}(3)}$). Comment décrire l'image de e_s pour cette action (c'est-à-dire l'image de $\rho(e_s)$ dans $U^{\otimes 3}$, où ρ est la représentation qu'on vient d'introduire), et quelle est sa dimension ? Même question pour e_a. En déduire la dimension de l'image de e'_r et de e''_r.

(4) On suppose toujours que U est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d finie, et on fait agir $GL(U)$ sur $U^{\otimes 3}$ de la façon usuelle (on envoie $f \in GL(U)$ sur $f^{\otimes 3} \in GL(U^{\otimes 3}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U^{\otimes 3})$). Expliciter une écriture $U^{\otimes 3} \cong (U_s \otimes_{\mathbb{C}} V_s) \oplus (U_a \otimes_{\mathbb{C}} V_a) \oplus (U_r \otimes_{\mathbb{C}} V_r)$, compatible aux actions de $\mathfrak{S}_3$ et de $GL(U)$, où U_s, U_a, U_r sont munis d'une action triviale de $\mathfrak{S}_3$ et d'une action de $GL(U)$ à préciser, et où V_r, V_a, V_r sont munis de l'action de $\mathfrak{S}_3$ déjà précisée et de l'action triviale de $GL(U)$.

En déduire la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U^{\otimes 3})$ par (l'image de) $GL(U)$.