1 (lemme de la trace). Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe opérant fidèlement et $\mathbb{C}$-linéairement sur V de sorte que la représentation V de G soit irréductible. On suppose que la fonction $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ (le « caractère ») associant à un $g \in G$ la trace de l'action $\rho(g)$ de g sur V, a une image finie de cardinal r. Montrer alors que $\operatorname{card} G \leq r^{n^2}$. Pour cela, on montrera (en utilisant un résultat de Burnside) qu'il existe n^2 éléments $g_1, \ldots, g_{n^2}$ de G qui (c'est-à-dire dont les images par $\rho\colon G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$) forment une $\mathbb{C}$-base de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, puis on montrera que les traces des hg_i, pour $h \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$, déterminent h.

Application (problème de Burnside pour les groupes linéaires) : Supposons que G soit un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $g^N = 1$ pour tout $g \in G$ (l'exposant de G divise N) : montrer qu'alors $\operatorname{card} G \leq N^{n^3}$, d'abord en supposant que $\mathbb{C}^n$ est une représentation irréductible de G, puis sans cette hypothèse (en procédant par récurrence sur la dimension, en décomposant explicitement l'action de G).

2 (radical de Jacobson). Soit A un anneau (associatif unitaire mais non nécessairement commutatif). On rappelle qu'un *A-module à gauche* (parfois dit « représentation » de A, mais on préfère garder ce terme pour le cas où A est une algèbre sur un corps k, ce que, d'ailleurs, on pourra éventuellement supposer) est un groupe abélien M muni d'un morphisme d'anneaux $A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$: naturellement, A lui-même est un A-module à gauche de façon évidente, et un sous-A-module de celui-ci (c'est-à-dire un sous-groupe additif de A stable par multiplication à gauche par A) sera appelé *idéal à gauche* de A. Un idéal à gauche est dit *maximal* lorsqu'il est strictement contenu dans A et maximal pour l'inclusion parmi les idéaux à gauche strictement contenus dans A. On dit par ailleurs qu'un A-module à gauche non nul est *simple* (ou *irréductible*) lorsque tout sous-A-module strict de celui-ci est nul.

Pour un élément $x \in A$ donné, montrer l'équivalence entre les affirmations suivantes : (i) x appartient à tous les idéaux à gauche maximaux de A, (ii) pour tout $a \in A$ l'élément $1 + ax$ est inversible à gauche dans A, et (iii) $xM = 0$ pour tout A-module à gauche simple M. En déduire que l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A est un idéal à droite (donc bilatère) de A, et que c'est l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de A (pour cela, on pourra trouver une condition semblable à (ii) mais symétrique entre droite et gauche).

Cette intersection commune aux idéaux à gauche maximaux de A et aux idéaux à droite maximaux de A sera appelée *radical de Jacobson* de A et notée $\operatorname{rad} A$.

3 (semisimplicité). Cet exercice fait suite à l'exerice 2. Soit k un corps et A une k-algèbre (associative unitaire mais non nécessairement commutative) qu'on supposera tout du long être de dimension finie sur k ainsi que tous les modules qui vont intervenir. On rappelle que A est dite *semisimple* (a priori « à gauche », mais en fait cette condition est symétrique comme on va le voir) lorsque tout sous-A-module à gauche N d'un A-module à gauche M admet un supplémentaire (i.e., on peut écrire $M = N \oplus N'$ pour un certain sous-A-module à gauche N' de M) ; on rappelle aussi que A est semisimple si et seulement si A, vu comme A-module à gauche de la façon naturelle, est somme de A-modules à gauche simples (qui sont donc des idéaux à gauche non nuls minimaux pour l'inclusion).

On suppose que le radical de Jacobson de A est nul : montrer que pour une certaine famille finie $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ d'idéaux à gauche maximaux de A la flèche naturelle $A \to \bigoplus_i (A/\mathfrak{m}_i)$ est injective. En déduire que A est semisimple.

Réciproquement, si A est semisimple, montrer que son radical de Jacobson est nul (on pourra écrire un supplémentaire du radical).

4. Soit Q le groupe des quaternions, i.e., le groupe ayant huit éléments $1, s_i, s_j, s_k, t, ts_i, ts_j, ts_k$, où t est central, $t^2 = 1$, et $s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = s_i s_j s_k = t$. On appelle $\mathbb{R}[Q]$ l'algèbre de groupe sur Q à coefficients dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les combinaisons $\mathbb{R}$-linéaire formelles d'éléments de Q, la multiplication provenant de celle sur Q). On rappelle qu'une représentation de Q signifie la même chose qu'une représentation de $\mathbb{R}[Q]$ (un $\mathbb{R}[Q]$-module à gauche).

Déterminer quatre représentations de Q de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que le plongement évident (soit $t \mapsto -1$, $s_i \mapsto i$, $s_j \mapsto j$ et $s_k \mapsto k$) de Q dans l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions réels[1] définit une représentation irréductible (= simple) de Q de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. En déduire une écriture explicite de la $\mathbb{R}$-algèbre (semisimple) $\mathbb{R}[Q]$ comme produit d'algèbres simples.

En déduire une écriture de $\mathbb{C}[Q]$ comme produit d'algèbres de matrices (on rappelle — ou on admet — que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$). Quelles sont les représentations irréductibles complexes de Q ?

5. Soit C_n le groupe cyclique d'ordre n. Montrer que pour tout corps k on a $k[C_n] \cong k[t]/(t^n - 1)$: en particulier, que vaut $\mathbb{C}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{C}$? et que vaut $\mathbb{Q}[C_n]$ et quelles sont les représentations irréductibles de C_n sur $\mathbb{Q}$?

([1]) C'est-à-dire (voir exercice 4 de la feuille n°2) l'algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Il s'agit d'une algèbre à divisions (« corps gauche »), i.e., tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse.