1. On appelle *idéal premier minimal* d'un anneau A un idéal premier qui n'en contient strictement aucun autre. Par exemple, si A est intègre, l'idéal nul (0) est l'unique idéal premier minimal.

(1) Montrer que si $(\mathfrak{p}_\iota)$ est une famille (non vide) totalement ordonnée d'idéaux premiers de A, alors l'intersection $\bigcap_\iota \mathfrak{p}_\iota$ est encore un idéal premier. En déduire que dans un anneau quelconque il existe toujours au moins un idéal premier minimal. Mieux : montrer que tout idéal premier contient un idéal premier minimal.

(2) Montrer que si A est noethérien, ses idéaux premiers minimaux sont en nombre fini (on pourra, par exemple, supposer que la propriété est fausse et considérer un idéal maximal pour l'inclusion parmi les idéaux I tels que l'anneau quotient A/I ait une infinité de premiers minimaux : I ne peut pas être premier...).

(3) Soit A noethérien, et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ ses idéaux premiers minimaux (on vient de voir qu'ils sont en nombre fini). Montrer que la dimension (de Krull) de A est le maximum des dimensions des $A/\mathfrak{p}_i$.

2. Soit A un anneau noethérien, et $x \in A$ qui ne soit pas inversible. Montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p} \subsetneq (x)$ est minimal (cf. l'exercice précédent) : on pourra, pour commencer, se ramener à A intègre, puis constater que $\mathfrak{p} = x\mathfrak{p}$ et appliquer (un corollaire de) Cayley-Hamilton.

3 (longueur d'un module). Si A est un anneau, on appelle *simple* un A-module non nul qui n'admet pas d'autre sous-module que 0 et lui-même : de façon équivalente, il s'agit d'un module isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. On appelle *suite de composition* ou *suite de Jordan-Hölder* d'un A-module M une suite $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$ avec chaque M_{i+1}/M_i simple.

(1) Montrer que la longueur d'une suite de composition est indépendante du choix de celle-ci. (Procéder par récurrence sur la longueur d'une suite de composition, de façon analogue au théorème de Jordan-Hölder pour les groupes.)

On peut donc définir la *longueur* d'un A-module M comme la longueur de n'importe quelle suite de composition (avec $\ell(M) = \infty$ si une suite de composition n'existe pas).

(2) Si $A = k$ est un corps, quelle est la longueur d'un k-espace vectoriel vu comme A-module ? Si $A = \mathbb{Z}$, quelle est la longueur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

(3) Montrer que si M est un A-module et $M' \subseteq M$ un sous-module, alors M admet une suite de composition si et seulement si M' et M/M' en admettent, et qu'alors on a $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M/M')$.

(4) Si A est un anneau local[1] noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, montrer que pour tout d le A-module $A/\mathfrak{m}^d$ a une longueur finie, i.e., admet une suite de composition. (Indication : montrer que c'est le cas de $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ pour chaque entier i en le considérant comme un espace vectoriel sur $k = A/\mathfrak{m}$.)

(5) Soit A un anneau noethérien tel que tout idéal premier de A soit maximal : montrer que A a une longueur finie (i.e., admet une suite de composition) comme A-module. (Indication : considérer un idéal I maximal pour la propriété que A/I soit un A-module de longueur infinie, et montrer que I est premier.)

4 (Hauptidealsatz de Krull). Soit A un anneau local noethérien intègre d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On suppose que, pour un certain $x \in A$, l'idéal $(x) = xA$ a pour radical $\mathfrak{m}$. On se propose de

([1]) On rappelle qu'un anneau local est, par définition, un anneau ayant un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ (ou, ce qui revient au même, un idéal $\mathfrak{m}$ tel que tout élément du complémentaire de $\mathfrak{m}$ soit inversible).

montrer que, dans ces conditions, la dimension (de Krull) de A est 1. Pour cela, on aura besoin de la notion de *longueur* d'un module, introduite à l'exercice précédent.

(1) Expliquer pourquoi il s'agit de prouver que : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de A, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, et pourquoi pour cela il suffit de vérifier $x \in \mathfrak{p}$.

(2) Soit $z \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. En notant $(z) \div x^n = \{t \in A | tx^n \in (z)\}$ (idéal de A), montrer que $((z) \div x^n)/(z) \cong ((x^n) \div z)/(x^n)$.

(3) Pourquoi existe-t-il n_0 tel que $(z) \div x^n = (z) \div x^{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$?

(4) Montrer que $A/(x^n)$ est de longueur finie, en utilisant le (5) de l'exercice n°3.

(5) En déduire que si $n \geq n_0$ alors $\ell(A/(x^n)) - \ell(A/((x^n) \div z))$ est constant, où ℓ désigne la longueur.

(6) Montrer que $A/((x^n) \div z) \cong ((x^n) + (z))/(x^n)$.

(7) En déduire que $(x^n) + (z) = (x^{n_0}) + (z)$ si $n \geq n_0$.

(8) Rappeler pourquoi $1 - ux$ est inversible pour tout $u \in A$, et déduire de ce qui précède que $x \in \mathfrak{p}$.

(∞) Si A est un anneau noethérien intègre (plus nécessairement local) et $x \in A$, montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal contenant x (cf. exercice n°1), il n'existe pas de chaînes d'idéaux premiers $(0) \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, aboutissant à $\mathfrak{p}$, de longueur ≥ 2 (comparer ce résultat à la conclusion de l'exercice 2 !).

5. Soit A la sous-algèbre de $k[x_1, \ldots, x_n]$ formée des polynômes dont tous les monômes sont de degré multiple de r. Quelle est la dimension (de Krull) de A ?