N.B. : Dans les deux exercices qui suivent, on ne supposera pas connue la théorie de la dimension de Krull. On supposera cependant connue la notion de degré de transcendance d'un corps : on rappelle que $\mathrm{deg.tr}_k K$ est le cardinal de n'importe quelle famille (x_i) d'éléments de K algébriquement indépendants sur k tels que K soit algébrique sur $k((x_i))$ (une telle famille existe et s'appelle base de transcendance de K sur k, et de toute famille d'éléments engendrant K sur k on peut extraire une base de transcendance).

1. Soit k un corps algébriquement clos. On considère $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes homogènes de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m > 0$ en les indéterminées $x_1, \ldots, x_n$. Le but de l'exercice est de montrer que si $n > m$ alors il existe (dans k^n) un zéro commun non-trivial (c'est-à-dire différent de $(0, \ldots, 0)$) à $f_1, \ldots, f_m$. On suppose donc que le seul zéro commun à $f_1, \ldots, f_m$ est $(0, \ldots, 0)$ et on va montrer $n \leq m$.

(1) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que tout monôme de degré (total) $\geq r$ en $x_1, \ldots, x_n$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par $f_1, \ldots, f_m$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]$.

(2) En déduire que tout monôme de degré (total) $\geq r$ en $x_1, \ldots, x_n$ peut s'écrire $g(x_1, \ldots, x_n)$ où g est un polynôme de degré total $< r$ en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients dans l'anneau $A = k[f_1, \ldots, f_m]$ engendré par $f_1, \ldots, f_m$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]$.

(3) En notant $K = k(f_1, \ldots, f_m)$ le corps des fractions de l'anneau intègre A (vu à l'intérieur de $k(x_1, \ldots, x_n)$), en déduire que $K[x_1, \ldots, x_n]$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Conclure que $k(x_1, \ldots, x_n)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

(4) En raisonnant sur le degré de transcendance, conclure que $n \leq m$.

2 (théorème de Tsen). Soit k un corps algébriquement clos, $k(t)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur k. On considère un polynôme $f \in k(t)[x_1, \ldots, x_n]$ homogène de degré d à $n + 1$ indéterminées à coefficients dans $k(t)$, où $0 < d < n$ (le degré est strictement inférieur au nombre d'indéterminées). Montrer que f a un zéro non trivial : il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $k(t)$, non tous nuls, tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Pour cela, on supposera (quitte à chasser les dénominateurs) que les coefficients de f sont dans $k[t]$, et on cherchera une solution $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_\ell = \sum_{j=0}^{N} c_{\ell,j} t^j$, où les $c_{\ell,j}$ sont à déterminer et où N est un entier suffisamment grand : en considérant alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ comme un système en les $c_{\ell,j}$, on appliquera le résultat de l'exercice 1.