1. Soient $k \subseteq K$ deux corps, et soit n un entier naturel. On munit K^n de sa topologie de Zariski[1] : (1) montrer qu'elle induit la topologie de Zariski sur le sous-ensemble k^n. (2) On suppose que k est algébriquement clos : montrer que pour tout fermé de Zariski Z de K^n défini par des équations à coefficients dans k, l'ensemble $Z \cap k^n$ est dense dans Z pour la topologie de Zariski. Ce résultat vaut-il encore si on ne suppose plus k algébriquement clos ?

2. Soit k un corps parfait, et $\bar{k}$ sa clôture algébrique. On appelle *groupe de Galois absolu*[2] de k le groupe Γ des automorphismes de $\bar{k}$ sur k.

(0) Montrer (comme en degré fini) que pour $x \in \bar{k}$, on a x fixe par Γ si et seulement si $x \in k$.

(1) Soit n un entier naturel. On notera $\mathbb{A}^n_k$ l'ensemble $\bar{k}^n/\Gamma$ des orbites de n-uplets d'éléments de $\bar{k}$ sous l'action de Γ (chacune de ces orbites est finie : pourquoi ?). Pourquoi y a-t-il un sens à se demander si un élément $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ s'annule en un point $x \in \mathbb{A}^n_k$?

On appelle *topologie de Zariski* sur $\mathbb{A}^n_k$ la topologie quotient de la topologie de Zariski sur $\bar{k}^n$ par l'action de Γ (c'est-à-dire la topologie dont les fermés sont donnés par des fermés de Zariski de $\bar{k}^n$ stables par Γ).

(2) Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$, on peut considérer l'idéal $\bar{k}\mathfrak{I}$ de $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ (pourquoi ?) : montrer que $V(\bar{k}\mathfrak{I}) \subseteq \bar{k}^n$ est stable par l'action de Γ, i.e., définit un fermé de Zariski de $\mathbb{A}^n_k$ — qu'on notera $V(\mathfrak{I})$ — et que c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{A}^n_k$ où tous les $f \in \mathfrak{I}$ s'annulent.

(3) Si B est une partie de $\mathbb{A}^n_k$, on définit $I(B)$ comme l'idéal des éléments $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ qui s'annulent en chaque $x \in B$. Montrer que si $B_{\bar{k}}$ désigne l'image réciproque de B dans $\bar{k}^n$, alors $I(B) = I(B_{\bar{k}}) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ et $I(B_{\bar{k}}) = \bar{k}\, I(B)$ (pour ce dernier point, on pourra se ramener à une extension galoisienne finie contenant les coefficients du polynôme considéré, et invoquer l'indépendance linéaire des caractères).

(4) Montrer que I et V définissent des bijections réciproques entre d'une part les idéaux $\mathfrak{I}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $\bar{k}\mathfrak{I}$ soit radical[3] et d'autre part les fermés de Zariski de $\mathbb{A}^n_k$.

3. Soit k un corps algébriquement clos et $\mathfrak{I}$ un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ qu'on pourra pour plus de simplicité supposer radical. On appelle $V(\mathfrak{I})$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{I}$, qu'on munit de la topologie de Zariski[4]. Montrer qu'alors $V(\mathfrak{I})$ est connexe (en tant qu'espace topologique) si et seulement si l'anneau quotient $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{I}$ n'a pas d'autres idempotents que 0 et 1 (c'est-à-dire que $e^2 = e$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{I}$ implique $e = 0$ ou $e = 1$).

4. Soit k un corps, n un entier naturel, et $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une famille de n^2 indéterminées. On appelle Δ le déterminant de la matrice (x_{ij}) (c'est-à-dire dont le coefficient sur la i-ième ligne et j-ième colonne est l'indéterminée x_{ij}) : ainsi, Δ est un élément de l'anneau $k[(x_{ij})]$ des polynômes en les n^2 indéterminées considérées.

(1) Montrer ce polynôme est irréductible (autrement dit, si $\Delta = PQ$ avec $P, Q \in k[(x_{ij})]$, alors l'un de P et Q est constant). Pour cela, on pourra étudier le degré de P et Q par rapport à toutes les variables d'une ligne i_0, puis d'une colonne j_0.

(2) Si k est algébriquement clos, montrer (sans utiliser (1)) que pour chaque $0 \leq r \leq n$ l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est un fermé algébrique irréductible dans $\mathbb{M}_n(k)$ (identifié

(1) On rappelle que c'est celle dont les fermés sont les $V(\mathfrak{I})$, lieu des zéros communs d'un idéal $\mathfrak{I} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ de polynômes — les équations de ce fermé.

(2) Attention ! L'extension $k \subseteq \bar{k}$ est en général de degré infini, et Γ est en général un groupe infini...

(3) Il se trouve en fait que, le corps k étant supposé parfait, $\bar{k}\mathfrak{I} \subseteq \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ est radical si et seulement si $\mathfrak{I} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ l'est.

(4) La topologie dont les fermés sont les $V(\mathfrak{J})$ pour $\mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{I}$.

à k^{2n}) muni de sa topologie de Zariski. Pour cela, on pourra utiliser l'application $\psi\colon \mathbb{M}_n(k) \times \mathbb{M}_n(k) \to \mathbb{M}_n(k)$ qui envoie (a, b) sur aJb où J est une matrice judicieusement choisie.

(3) Quel rapport entre les questions (1) et (2) ?