1. On rappelle que le radical (de Jacobson) $\operatorname{rad} A$ d'un anneau (commutatif) A est l'intersection de tous ses idéaux maximaux, et que $x \in A$ est dans $\operatorname{rad} A$ si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $1+ax \in A^\times$ (où $A^\times$ désigne le groupe des unités — c'est-à-dire les éléments inversibles de A). De même, on appelle nilradical $\operatorname{Nil} A$ d'un anneau (commutatif) A l'intersection de tous ses idéaux premiers, et $\operatorname{Nil} A$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A.

(1) Manifestement, $\operatorname{Nil} A \subseteq \operatorname{rad} A$ pour tout anneau (commutatif) A (pourquoi ?). Montrer que si A est un anneau *artinien*, c'est-à-dire que toute suite d'idéaux décroissante pour l'inclusion stationne, alors il y a égalité. (Indication : si $\mathfrak{R} = \operatorname{rad} A$, on considérera la suite décroissante $\mathfrak{R}^k$ des puissances de l'idéal $\mathfrak{R}$ et on appliquera le lemme de Nakayama. Pour simplifier, on pourra admettre[1] le résultat suivant : tout anneau artinien est noethérien.)

(2) Montrer que si A est un anneau (commutatif) quelconque alors $\operatorname{rad}(A[t]) = \operatorname{Nil}(A[t]) = (\operatorname{Nil} A)[t]$. (On montrera d'abord que $(A/\operatorname{Nil} A)[t]$ est réduit, et pour relier $\operatorname{rad}(A[t])$ au reste on utilisera le critère $f \in \operatorname{rad}(A[t]) \Longleftrightarrow (\forall h)\,(1 + hf) \in A[t]^\times$.)

2. Soit A un anneau local[2]. Lorsque M est un A-module de type fini, on appelle (très logiquement) *famille génératrice minimale* un ensemble d'éléments de M qui engendrent celui-ci (en tant que A-module) et dont aucun sous-ensemble strict n'engendre M. Montrer que toutes les familles génératrices minimales de M ont le même cardinal (fini). (Indication : si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on considérera $\widetilde{M} = M/\mathfrak{m}M$ l'espace vectoriel résiduel sur le corps $k = A/\mathfrak{m}$. On appliquera le lemme de Nakayama.) Donner un contre-exemple à cette affirmation lorsque A n'est pas un anneau local.

3. Les questions suivantes sont indépendantes.

(1) Soit A la partie de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes dont le coefficient de degré 1 (ou, si on préfère, la dérivée à l'origine) est nul : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle n'est pas intégralement close (quelle est le corps des fractions de A, et quelle est la fermeture intégrale de A dedans ?).

(2) Soit A la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ formée des polynômes n'ayant que des monômes de degré total pair (ou, si on préfère, vérifiant $p(-x, -y) = p(x, y)$) : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x, y]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle est intégralement close (de nouveau, quel est le corps des fractions de A ?). Montrer cependant que A n'est pas un anneau factoriel.

(3) Soit A la partie de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes n'ayant que des monômes de degré total pair (ou, si on préfère, vérifiant $p(-t) = p(t)$) : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$, de type fini sur $\mathbb{C}$ et intégralement close, et montrer que A est factoriel (ou, mieux, décrire un isomorphisme entre A et un anneau connu pour être factoriel).

(4) Soit A la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ formée des polynômes constants sur l'axe $x = 0$, c'est-à-dire n'ayant aucun coefficient en y^i pour $i > 0$. Montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x, y]$ mais qu'elle *n'est pas* noethérienne (on pourra considérer l'idéal I_n de A engendré par les xy^i pour $0 \leq i \leq n$). Quel est le corps des fractions de A ? L'élément y, ou, plus généralement, un polynôme non constant en y, est-il entier sur A ? L'anneau A est-il intégralement clos ? Factoriel ?

([1]) Si on ne veut pas l'admettre, considérer l'ensemble $\mathscr{L}$ des idéaux *de type fini* L tels que $\mathfrak{R}^\infty \cdot L \neq 0$, où $\mathfrak{R}^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{R}^k$, et prendre un élément minimal pour l'inclusion dans $\mathscr{L}$.

([2]) On rappelle qu'un anneau (commutatif) est dit *local* lorsque l'ensemble de ses éléments non inversibles forme un idéal $\mathfrak{m}$, qui est alors l'unique idéal maximal de A (un idéal maximal $\mathfrak{m}$ est un idéal strict maximal pour l'inclusion — ou, de façon équivalente, tel que $A/\mathfrak{m}$ est un corps).

(5) Soit A la sous-algèbre de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes tels que $f(-1) = f(1)$. Montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$ en en donnant des générateurs explicites. Est-elle intégralement close ? (Sinon, quelle est sa fermeture intégrale dans son corps des fractions ?)

(6) Donner des générateurs sur $\mathbb{C}$ de la sous-algèbre de $\mathbb{C}[x, y]$ formée des polynômes tels que $f(-1, 0) = f(1, 0)$. Est-elle intégralement close ?