1. Exprimer les racines des polynômes suivants (on indiquera une éventuelle simplification), puis calculer leurs groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$: (a) $t^4 - 4t^2 = 0$, (b) $t^4 - 4t^2 - 45 = 0$, (c) $t^4 - 4t^2 - 5 = 0$, (d) $t^4 - 4t^2 - 1 = 0$, (e) $t^4 - 4t^2 + 2 = 0$ et (f) $t^4 - 4t^2 + 1 = 0$.

2. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes sur $\mathbb{Q}$ (on pourra réduire modulo 2, 3 et/ou 5) : (a) $t^4 + 2t^2 + t + 3 = 0$, (b) $t^4 + 3t^3 - 3t - 2 = 0$, (c) $t^6 + 22t^5 - 9t^4 + 12t^3 - 37t^2 - 29t - 15 = 0$.

3. On se propose de montrer que l'extension de corps $\mathbb{Q}(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})})/\mathbb{Q}$ est galoisienne avec pour groupe de Galois le groupe Q des quaternions (i.e., Q est le groupe ayant huit éléments $1, s_i, s_j, s_k, t, ts_i, ts_j, ts_k$, où t est central, $t^2 = 1$, et $s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = s_i s_j s_k = t$).

(1) Posons $\alpha = (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})$, et soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$: expliquer pourquoi l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois produit de deux groupes cycliques d'ordre 2. On notera $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ les trois éléments non triviaux.

(2) Montrer que pour chaque $\sigma = \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ la quantité $\sigma(\alpha)/\alpha$ est le carré d'un élément de K que l'on précisera.

(3) Soit $\delta = \sqrt{\alpha}$ et $L = \mathbb{Q}(\delta)$. Montrer que $\delta \notin K$ (on pourra utiliser la question précédente). Quel est le groupe de Galois de L/K ? On note τ son générateur, qu'on considérera également comme un élément de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ (dont $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un sous-groupe).

(4) Définir des automorphismes $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_j$ de $L = K(\sqrt{\alpha})$ sur $\mathbb{Q}$ qui prolongent σ_i et σ_j respectivement. On posera $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j$.

(5) Calculer la loi de groupe et conclure.

4. On considère $\mathbb{C}(\lambda)$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée (λ) sur $\mathbb{C}$, et sur ce corps l'équation du cinquième degré $t^5 - \lambda t^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$ $(\star)$. On se propose de prouver que le groupe de Galois (du corps de décomposition) de cette équation est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$ sur cinq objets. L'idée pour cela sera de considérer des développements des solutions (algébriques) de l'équation autour de $\lambda = 0$ et de $\lambda = 1$.

(1) On considère le corps $\mathbb{C}((\lambda))$ des « séries de Laurent » en l'indéterminée λ, c'est-à-dire des expressions formelles $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \lambda^k$ où $a_k \in \mathbb{C}$ et où seul un nombre fini des a_k avec $k < 0$ est non nul, l'addition et la multiplication se faisant formellement. (Le plus petit k tel que $a_k \neq 0$, ou bien ∞ si tous les a_k sont nuls, s'appellera la *valuation*, notée $v(f)$, de l'élément f de $\mathbb{C}((\lambda))$ ainsi défini.) Expliquer brièvement pourquoi il s'agit bien d'un corps et pourquoi il contient $\mathbb{C}(\lambda)$. L'équation $t^5 - \lambda t^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{C}((\lambda))$? (On pourra raisonner sur la valuation des hypothétiques solutions.)

(2) On appelle $\mathbb{C}((\lambda^{1/5}))$ le corps (analogue) des séries de Laurent en l'indéterminée $\lambda^{1/5}$ qui vérifie $(\lambda^{1/5})^5 = \lambda$ (expliquer brièvement pourquoi cela a bien un sens). Combien de racines a l'équation $(\star)$ dans ce corps ? Quel est le groupe de Galois de $\mathbb{C}((\lambda^{1/5}))$ sur $\mathbb{C}((\lambda))$, et comment opère-t-il sur les racines de l'équation $(\star)$? Qu'en déduit-on sur le groupe de Galois de $(\star)$ sur $\mathbb{C}(\lambda)$?

(3) En considérant de façon analogue les racines de $(\star)$ dans les corps $\mathbb{C}((\lambda - 1))$ et dans $\mathbb{C}(((\lambda - 1)^{1/2}))$, que déduit-on cette fois ? Conclure.

5 (l'endécagone régulier). Expliquer de façon détaillée (mais sans faire les calculs) comment on peut démontrer que $\cos \frac{2\pi}{11}$ vaut

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\sqrt[5]{\frac{11}{4}}\, \Bigg(& \left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}-20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\
& + \left(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}+20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\
& + \left(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}-25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\
& + \left(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}+25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

(ici $\sqrt[5]{z}$ désigne la détermination principale de la racine cinquième, c'est-à-dire celle dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$).