Rappel : Si B et B' sont deux A-algèbres, on munit le A-module $B \otimes_A B'$ d'une structure de A-algèbre (dite *algèbre produit tensoriel*) par la multiplication $(x \otimes x')\,(y \otimes y') = (xy) \otimes (x'y')$ (et avec l'élément neutre $1_B \otimes 1_{B'}$). Si B (resp. B') est commutative, on peut encore considérer $B \otimes_A B'$ comme une B-algèbre (resp. une B'-algèbre) par $b(x \otimes x') = (bx) \otimes x'$ (resp. $b'(x \otimes x') = x \otimes (b'x')$) ; attention, si $B' = B$, les deux structures de B-algèbre ainsi définies sur $B \otimes_A B$, bien qu'isomorphes, *ne coïncident pas* en général (on va voir des exemples).

1. Soit A un anneau et B une A-algèbre (non nécessairement commutative) non nulle : montrer que $B \otimes_A B$ est encore non nulle.

Corrigé. L'application A-bilinéaire $B \times B \to B$ envoyant (x, y) sur xy définit une flèche A-linéaire $B \otimes_A B \to B,\ x \otimes y \mapsto xy$: comme l'image de $1 \otimes 1$ par celle-ci est $1 \in B$, qui n'est pas nul, c'est bien que $B \otimes_A B$ n'est pas nul. (Remarquons qu'on n'a même pas besoin du fait que l'algèbre est associative, seulement de l'existence d'une unité multiplicative.) ✓

2. Soient m et n des entiers naturels et k un corps : décrire la k-algèbre $\mathbb{M}_m(k) \otimes_k \mathbb{M}_n(k)$ produit tensoriel des algèbres $\mathbb{M}_m(k)$ et $\mathbb{M}_n(k)$ de matrices respectivement $m \times m$ et $n \times n$ sur k.

Corrigé. On identifie comme d'habitude $\mathbb{M}_m(k)$ aux applications k-linéaires $k^m \to k^m$, et de façon analogue pour $\mathbb{M}_n(k)$. La notion de produit tensoriel d'application linéaire permet de définir $M \mathbin{\tilde{\otimes}} N$ pour $M \in \mathbb{M}_m(k)$ identifié à un $M\colon k^m \to k^m$ et $N \in \mathbb{M}_n(k)$ identifié à un $N\colon k^n \to k^n$: il s'agit d'une application linéaire $k^m \otimes_k k^n \to k^m \otimes_k k^n$, qu'on peut considérer (en identifiant $k^m \otimes_k k^n$ à k^{mn}) comme une application linéaire $k^{mn} \to k^{mn}$, soit un élément de $\mathbb{M}_{mn}(k)$. On a ainsi défini une application k-linéaire $\Phi\colon \mathbb{M}_m(k) \otimes_k \mathbb{M}_n(k) \to \mathbb{M}_{mn}(k)$, envoyant $M \otimes N$ sur $M \mathbin{\tilde{\otimes}} N$. En explicitant les identifications faites, on voit que Φ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Mais comme $\Phi((M \otimes N)\,(M' \otimes N')) = \Phi((MM') \otimes (NN')) = (MM') \mathbin{\tilde{\otimes}} (NN') = (M \mathbin{\tilde{\otimes}} N)\,(M' \mathbin{\tilde{\otimes}} N') = \Phi(M \otimes N)\,\Phi(M' \otimes N')$, on voit que Φ est même un isomorphisme de k-algèbres. Bref, $\mathbb{M}_m(k) \otimes_k \mathbb{M}_n(k)$ s'identifie en tant que k-algèbre à $\mathbb{M}_{mn}(k)$. ✓

3. Décrire, en tant qu'algèbre sur $\mathbb{R}$, le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On précisera les deux structures de $\mathbb{C}$-algèbre sur ce produit tensoriel (provenant de la multiplication sur le facteur de gauche ou sur le facteur de droite).

Corrigé. On peut dire que $\mathbb{C}$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $\mathbb{R}$, par un seul élément, i, qui vérifie $i^2 + 1 = 0$; en autres termes, $\mathbb{C}$ est le quotient $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ de l'algèbre $\mathbb{R}[t]$ des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée t par l'idéal (t^2+1) engendré par la relation en question (et on note i l'image de $t \in \mathbb{R}[t]$ dans ce quotient). De cette description $\mathbb{R}[t] \xrightarrow{\times(t^2+1)} \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C} \to 0$ il ressort, quitte à tensoriser (à gauche, mettons) par $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est le quotient de $\mathbb{C}[t]$ par l'idéal engendré par $t^2 + 1$, c'est-à-dire $\mathbb{C}[t] \xrightarrow{\times(t^2+1)} \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to 0$. Or $t^2 + 1$, maintenant, se décompose comme $(t-i)(t+i)$. Il s'ensuit qu'on peut représenter la classe d'un $f \in \mathbb{C}[t]$ dans $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[t]/(t^2+1)$ comme le couple $(f(i), f(-i))$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Ceci définit un isomorphisme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ envoyant $z \otimes 1$ (qui se représente par $z \in \mathbb{C}[t]/(t^2+1)$) sur (z, z), et $z \otimes i$ (qui se représente par $zt \in \mathbb{C}[t]/(t^2+1)$) sur $(zi, -zi)$, ou, de façon plus générale, $z \otimes z' \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par $(zz', z\bar{z}') \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Cet isomorphisme, tel qu'on l'a construit, est un isomorphisme non seulement pour la structure de $\mathbb{R}$-algèbre, mais aussi pour la structure de $\mathbb{C}$-algèbre venant du facteur de gauche (soit celle donnée par la flèche $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},\ z \mapsto z \otimes 1$: cela se voit aussi directement), autrement dit $z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, zz_2)$. Pour l'autre structure de $\mathbb{C}$-algèbre, il faut ajouter une conjugaison complexe sur le deuxième facteur $\mathbb{C}$, soit $z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, \bar{z}z_2)$. ✓

4. On appelle algèbre des quaternions, et on note $\mathbb{H}$, l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4...). Montrer qu'il s'agit d'une algèbre à divisions (i.e., tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse) et montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (on pourra par exemple introduire les matrices $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) et $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ (on pourra s'inspirer des matrices utilisées pour répondre à la question précédente).

Corrigé. D'abord $\mathbb{H}$ a bien la dimension annoncée : elle a une base comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel formée des quatre éléments $1, i, j, k$ puisque tout produit de deux tels éléments s'exprime comme combinaison des autres (par exemple $ij = k$ car $ij = -ij(k^2) = -(ijk)k = k$). Ensuite, on vérifie facilement que $(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, ce qui montre que tout quaternion $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ non nul admet un inverse (à savoir $\frac{1}{N}(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)$ où $N = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ vérifie $N \neq 0$ dans $\mathbb{R}$) : donc $\mathbb{H}$ est bien une algèbre à divisions.

Le produit tensoriel $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les mêmes générateurs et relations, sur $\mathbb{C}$ cette fois. Montrons donc qu'on peut trouver trois matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma_k^2 = \sigma_i\sigma_j\sigma_k = -1$ et qui engendrent $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre (pour cela, il suffit bien sûr qu'avec l'identité elles l'engendrent en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel). On prend

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \sigma_k = \sigma_i\sigma_j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et on a bien les relations souhaitées, comme on le vérifie immédiatement.

Pour prouver que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, il s'agit de trouver seize matrices $\lambda_{1\otimes 1}, \ldots, \lambda_{k\otimes k} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ qui en forment une base correspondant à la base $\{1\otimes 1, 1\otimes i, 1\otimes j, 1\otimes k, i\otimes 1, \ldots, k\otimes k\}$ de $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ et vérifient les mêmes relations. On part des matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ obtenues ci-dessus : on voudrait poser, par exemple, $\lambda_{i\otimes j} = \sigma_i \otimes \sigma_j$, mais ça ne donne pas une matrice réelle ; au lieu de ça, on fait usage du fait que σ_j est à coefficients réels : en posant

$$\lambda_{1\otimes 1} = 1 \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{i\otimes 1} = -i\, \sigma_i \otimes \sigma_j \ , \ \ \lambda_{j\otimes 1} = \sigma_j \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{k\otimes 1} = -i\, \sigma_k \otimes \sigma_j$$

on a quatre matrices réelles (4×4) qui vérifient les relations définissant les quaternions, et n'importe laquelle de ces quatre matrices commute à n'importe laquelle des quatre suivantes :

$$\lambda_{1\otimes 1} = 1 \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{1\otimes i} = -i\, \sigma_j \otimes \sigma_i \ , \ \ \lambda_{1\otimes j} = 1 \otimes \sigma_j \ , \ \ \lambda_{1\otimes k} = -i\, \sigma_j \otimes \sigma_k$$

Ceci permet de définir les seize matrices recherchées (par exemple $\lambda_{i\otimes j} = \lambda_{i\otimes 1}\lambda_{1\otimes j} = -i\sigma_i \otimes 1$ qui vérifient toutes les relations souhaitées et qui forment une base sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ (elles sont réelles et sur $\mathbb{C}$ elles sont libres car il y en a une et une seule proportionnelle à chaque $\sigma_1 \otimes \sigma_2$). On a donc bien $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$. (Une autre méthode, plus canonique, consiste à identifier $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ par $x \otimes y \mapsto xz\bar{y}$.) ✓