

**Rappel :** Si  $B$  et  $B'$  sont deux  $A$ -algèbres, on munit le  $A$ -module  $B \otimes_A B'$  d'une structure de  $A$ -algèbre (dite *algèbre produit tensoriel*) par la multiplication  $(x \otimes x')(y \otimes y') = (xy) \otimes (x'y')$  (et avec l'élément neutre  $1_B \otimes 1_{B'}$ ). Si  $B$  (resp.  $B'$ ) est commutative, on peut encore considérer  $B \otimes_A B'$  comme une  $B$ -algèbre (resp. une  $B'$ -algèbre) par  $b(x \otimes x') = (bx) \otimes x'$  (resp.  $b'(x \otimes x') = x \otimes (b'x')$ ); attention, si  $B' = B$ , les deux structures de  $B$ -algèbre ainsi définies sur  $B \otimes_A B$ , bien qu'isomorphes, ne coïncident pas en général (on va voir des exemples).

1. Soit  $A$  un anneau et  $B$  une  $A$ -algèbre (non nécessairement commutative) non nulle : montrer que  $B \otimes_A B$  est encore non nulle.
2. Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels et  $k$  un corps : décrire la  $k$ -algèbre  $\mathbb{M}_m(k) \otimes_k \mathbb{M}_n(k)$  produit tensoriel des algèbres  $\mathbb{M}_m(k)$  et  $\mathbb{M}_n(k)$  de matrices respectivement  $m \times m$  et  $n \times n$  sur  $k$ .
3. Décrire, en tant qu'algèbre sur  $\mathbb{R}$ , le produit tensoriel  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On précisera les deux structures de  $\mathbb{C}$ -algèbre sur ce produit tensoriel (provenant de la multiplication sur le facteur de gauche ou sur le facteur de droite).
4. On appelle algèbre des quaternions, et on note  $\mathbb{H}$ , l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$  engendrée par les trois éléments  $i, j, k$  soumis aux relations  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4...). Montrer qu'il s'agit d'une algèbre à divisions (i.e., tout élément non nul de  $\mathbb{H}$  admet un inverse) et montrer que  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  (on pourra par exemple introduire les matrices  $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) et  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$  (on pourra s'inspirer des matrices utilisées pour répondre à la question précédente).