1. Soit k un corps. On appelle $k^{\mathbb{N}}$ le k-espace vectoriel des suites d'éléments de k. Expliciter l'application k-linéaire naturelle $\Phi\colon k^{\mathbb{N}} \otimes_k k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}^2}$. Montrer que Φ n'est pas surjective, en exhibant un élément qui n'est pas dans son image. Montrer que Φ est injective.

Corrigé. Donner une application linéaire $k^{\mathbb{N}} \otimes_k k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}^2}$ revient à donner une application bilinéaire $k^{\mathbb{N}} \times k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}^2}$: on a bien sûr envie de prendre $((u_m)_{m\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ pour définir $\Phi\colon (u_m) \otimes (v_n) \mapsto (u_m v_n)$.

Considérons l'élément $\delta \in k^{\mathbb{N}^2}$ « diagonal » donné par $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ et $\delta_{mn} = 0$ sinon. On veut montrer que δ n'est pas dans l'image de Φ, c'est-à-dire qu'on ne peut pas écrire $\delta_{mn} = \sum_{k=1}^{N} u_m^{(k)} v_n^{(k)}$ pour certaines suites $(u_m^{(k)})$ et $(v_n^{(k)})$: or si c'était le cas, en regardant les $(N+1)$-uplets $e_n = (\delta_{mn})_{n=0,\dots,N} \in k^{N+1}$ pour m allant de 0 à $N+1$, on voit qu'on a réussi à écrire $N+1$ éléments linéairement indépendants $e_0, \dots, e_N$ de k^{N+1} (c'est même la base canonique) comme combinaison linéaire de N éléments $(v_n^{(k)})_{n=0,\dots,N}$ (pour k allant de 1 à N), ce qui est impossible.

Montrons à présent que Φ est injective. Soit $x = \sum_{k=1}^{N} (u_m^{(k)}) \otimes (v_n^{(k)})$ un élément de $k^{\mathbb{N}} \otimes k^{\mathbb{N}}$ tel que $\Phi(x) = 0$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{N} u_m^{(k)} v_n^{(k)}$, et on veut montrer que $x = 0$ dans $k^{\mathbb{N}} \otimes k^{\mathbb{N}}$. Or, quitte à remplacer chaque $(v^{(k)})$ par sa décomposition dans une certaine base de l'espace vectoriel $\langle v^{(k)} \rangle$ qu'à eux tous ils engendrent (dans $k^{\mathbb{N}}$), on peut supposer que les $v^{(k)}$ sont linéairement indépendants. Mais dans ce cas le fait que $\sum_{k=1}^{N} u_m^{(k)} v_n^{(k)} = 0$ pour tout n montre que $u_m^{(k)} = 0$ et ce, pour tout k et tout m : c'est donc que $x = 0$. (***Remarque*** : cette démonstration peut paraître idiote, mais l'exercice 5 montre qu'il y a vraiment un enjeu !) ✓

2. On rappelle qu'un $\mathbb{Z}$-module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien.

(a) Rappeler pourquoi, si M est un groupe abélien et n un entier naturel non nul, le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie naturellement à M/nM.

(b) Calculer les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ de deux quelconques des groupes abéliens parmi : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n un naturel non nul variable), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(c) En notant $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers dont presque tous les termes (c'est-à-dire : tous sauf un nombre fini) sont nuls, et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le groupe abélien de toutes les suites d'entiers, expliciter $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et les comparer à $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Corrigé. (a) On définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\varphi\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to M/nM$ en envoyant $x \otimes \bar{k}$ (où $x \in M$ et $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) sur la classe de kx dans M/nM : cette application a bien un sens car elle provient d'une application bilinéaire $M \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to M/nM$. Montrons qu'elle est bijective.

Considérons l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\psi\colon M/nM \to M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ qui envoie $\bar{x}$, pour $x \in M$, sur $x \otimes \bar{1} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$: cette application est bien définie car si $\bar{x} = \overline{x'}$, c'est-à-dire $x' - x = ny$ avec $y \in M$, alors $x' \otimes \bar{1} = x \otimes \bar{1} + (ny) \otimes \bar{1} = x \otimes \bar{1} + y \otimes \bar{n} = x \otimes \bar{1}$, donc $x \otimes \bar{1}$ ne dépend que de $\bar{x} \in M/nM$ et pas de son représentant x dans M, et on est bien fondé à poser $\psi(\bar{x}) = x \otimes \bar{1}$.

Le fait que la composée $\varphi\psi$ est l'identité $\mathrm{id}_{M/nM}$ est trivial. Le fait que la composée $\psi\varphi$ est aussi l'identité ($\mathrm{id}_{M\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$) nécessite un petit peu plus d'explication : mais c'est évident pour les éléments de la forme $x \otimes \bar{1}$; or tout élément de $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est de cette forme puisque $\bar{1}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc tout élément $\bar{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut s'écrire comme une somme de $\bar{1}$, donc tout élément de $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ comme une somme de $x_i \otimes \bar{1}$, qui est elle-même de la forme $x \otimes \bar{1}$. Donc $\psi\varphi$ est bien l'identité sur tout $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Donc φ et ψ sont bien des isomorphismes réciproques, et on a prouvé $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong M/nM$.

(b) Pour tout groupe abélien M on a $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = M$. Pour tensoriser avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on vient de voir que $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = M/nM$: donc $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m\wedge n)\mathbb{Z}$ (ici, $m\wedge n$ désigne le pgcd de m et n) et $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ (tout élément de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est multiple de n).

Ensuite, $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. En effet, on a une application bilinéaire (la multiplication !) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ qui définit une flèche $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ par $r \otimes r' \mapsto rr'$. Cette application est évidemment surjective. Pour voir l'injectivité, on remarque que (pour $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) on a $\frac{p}{q} \otimes \frac{p'}{q'} = (q'\frac{p}{qq'}) \otimes (p'\frac{1}{q'}) = (p'\frac{p}{qq'}) \otimes (q'\frac{1}{q'}) = \frac{pp'}{qq'} \otimes 1$ donc tout élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est de la forme $r \otimes 1$ avec $r \in \mathbb{Q}$, et $r \otimes 1$ n'a une image nulle que pour $r = 0$.

Remarquons que si dans un groupe abélien M tout élément est d'ordre fini (on dit que M est « de torsion ») alors $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. En effet, si $x \in M$ est d'ordre fini n, on a $x \otimes \frac{p}{q} = (nx) \otimes \frac{p}{nq} = 0 \otimes \frac{p}{nq} = 0$ dans ce produit tensoriel. En particulier, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ car tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini (et on a déjà remarqué que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$). Enfin, la surjection canonique $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définit une application $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, qui est nécessairement surjective (car dans tout tenseur $x \otimes y$ on peut relever l'élément y), donc $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est également nul.

Pour résumer la situation, on a le tableau suivant :

$\otimes_{\mathbb{Z}}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/(m \wedge n)\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	0	0

(c) On a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$, le $\mathbb{Z}$-module libre de base dénombrable, donc (le produit tensoriel distribue sur la somme directe) $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$.

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, lui, n'est pas libre[1], et le produit tensoriel ne distribue pas sur le produit direct infini. Néanmoins, on peut décrire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ comme ceci : c'est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ formé des suites de rationnels dont le dénominateur reste borné ; en effet, si on note E l'espace ainsi décrit, on a une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \to E$ envoyant $(u_n)\otimes r$ sur (ru_n), et on peut lui définir une réciproque en envoyant une suite (u_n) de rationnels de dénominateur borné sur $(Nu_n) \otimes \frac{1}{N}$ où N est tel que tous les Nu_n soient entiers. (Comme en (a), le point intéressant est que tout élément de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ peut s'écrire $(v_n) \otimes \frac{1}{N}$ pour un certain N.) ✓

3. Soit k un corps, et $A = k[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées x et y sur k (on rappelle qu'il est factoriel). Soit $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal de A engendré par x et y, c'est-à-dire l'idéal des polynômes s'annulant en $(0, 0)$ (pourquoi ?) — qu'on verra notamment comme un A-module.

Pour éviter les confusions, on notera $\mathfrak{m}^{\oplus 2} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ la somme directe (= le produit direct) de deux copies de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ l'idéal produit de $\mathfrak{m}$ avec lui-même. Le but de l'exercice est de déterminer le produit tensoriel $\mathfrak{m}^{\otimes 2} = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}$ avec lui-même au-dessus de A.

(1) On considère $\varphi\colon A^{\oplus 2} \to \mathfrak{m}$ défini par $\varphi(f, g) = fx + gy$. Expliquer pourquoi φ est surjective et montrer que son noyau est l'image d'une application A-linéaire $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}$ injective à préciser.

(2) En déduire que $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ peut se décrire comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module isomorphe à $\mathfrak{m}$ que l'on précisera. On appellera $\varphi_{\mathfrak{m}}$ la surjection $\mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ ainsi définie.

(3) Soit $\mu\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ défini par $\mu(m \otimes m') = mm'$: quelle est l'image de μ ? Quelle est la composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$?

([1]) Ce n'est pas évident ; en tout cas, ce qui suit ne le prouve pas.

(4) Soit $\Delta = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Montrer que $\mu(\Delta) = 0$ et $\Delta \neq 0$.

(5) Montrer que tout élément du noyau $\ker \mu$ de μ s'écrit de la forme $t\Delta$ pour un $t \in k$: on pourra montrer pour $d \in \ker \mu$ que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$.

(6) Définir une application A-linéaire (non canonique) $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ telle que la composée $\mu\lambda$ soit l'identité.

(7) Conclure quant à la structure de $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ en tant que A-module.

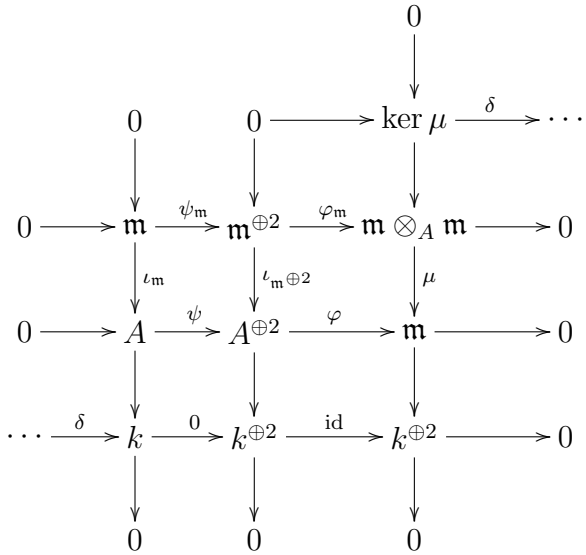
Corrigé. Tout d'abord, l'idéal $\mathfrak{m} = (x, y)$ engendré par x et y est bien l'idéal des polynômes f tels que $f(0,0) = 0$: en effet, $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des $fx + gy$ avec $f, g \in A$, et c'est polynômes s'annulent évidemment en $(0,0)$, mais réciproquement, un polynôme dont le terme constant est nul peut s'écrire sous la forme $fx + gy$ (on peut même s'arranger pour que g ne dépende que de x, auquel cas l'écriture est unique).

(1) La surjectivité de φ n'est autre que l'affirmation que $\mathfrak{m}$ est engendré par x et y, ce qui en est la définition. Le noyau de φ est l'ensemble des couples (f, g) d'éléments de A tels que $fx = -gy$: pour un tel couple, f doit être divisible par y donc on peut écrire $f = hy$ et alors $g = -hx$, c'est-à-dire que (f, g) est l'image de h par $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}, h \mapsto (hy, -hx)$. L'injectivité de ψ est évidente (A est intègre).

Pour résumer, on a une suite exacte $0 \to A \xrightarrow{\psi} A^{\oplus 2} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{m} \to 0$

(2) Puisque φ est surjective, on en déduit (exactitude à droite du produit tensoriel) que $\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ l'est aussi et que son noyau est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}} = \psi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. On peut décrire ces flèches un peu mieux : $\psi_{\mathfrak{m}}$ envoie $m \in \mathfrak{m}$ sur $(my, -mx) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ et $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie $(fm, gm) = (f, g) \otimes m \in \mathfrak{m}^{\oplus 2} = A^{\oplus 2} \otimes_A \mathfrak{m}$ (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $(fx + gy) \otimes m \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, c'est-à-dire (quitte à faire passer f et g de l'autre côté du signe $\otimes$) que $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (m, m') sur $x \otimes m + y \otimes m'$. L'injectivité de $\psi_{\mathfrak{m}}$ est évidente : il s'agit de la restriction de ψ à $\mathfrak{m}$ au départ et $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ à l'arrivée. On a donc bien décrit $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ (l'image de $\varphi_{\mathfrak{m}}$) comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module (le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, qui est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}}$) isomorphe à $\mathfrak{m}$ (comme $\psi_{\mathfrak{m}}$ est injective).

(3) L'image de μ est le sous-A-module de $\mathfrak{m}$, donc de A, engendré par les produits de deux éléments quelconques de $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = (x^2, xy, y^2)$. La composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (fm, gm) (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $fmx + gmy$, autrement dit, $\mu\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ où $\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ désigne l'injection canonique de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ dans $A^{\oplus 2}$.



(4) On a $\mu(\Delta) = \mu(x \otimes y - y \otimes x) = xy - yx = 0$. Montrons maintenant que $\Delta \neq$

0 : on a $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y,0) - \varphi_{\mathfrak{m}}(0,x) = \varphi_{\mathfrak{m}}(y,-x)$, et pour montrer que $\Delta \neq 0$ il suffit de prouver que $(y,-x) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ n'est pas dans le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, lequel est également l'image de $\psi_{\mathfrak{m}}$; or $(y,-x) = \psi(1)$ et comme $1 \in A$ n'est pas dans $\mathfrak{m}$, que ψ est injective et que $\psi_{\mathfrak{m}}$ est sa restriction à $\mathfrak{m}$, on bien $\Delta \neq 0$. (Une autre façon de raisonner consiste à observer que l'application A-bilinéaire $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to k$ qui envoie $(ax+by+\cdots, a'x+b'y+\cdots)$ sur ba' définit une application A-linéaire $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to k$ qui prend une valeur non nulle sur Δ.)

(5) Prenons $d \in \ker \mu$: puisque $\varphi_{\mathfrak{m}}$ est surjective, on peut écrire $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(m,m')$ avec $(m,m') \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. Alors $\varphi(m,m') = 0$ car $\varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}} = \mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ donc il s'écrit aussi $\mu(d) = 0$. Mais ceci signifie (comme le noyau de φ est l'image de ψ) que $(m,m') = \psi(h)$ pour un (unique) $h \in A$. Soit $t = h(0,0)$ la classe de h dans $A/\mathfrak{m} = k$. Alors $h - t$ est dans $\mathfrak{m}$ donc $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h-t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi_{\mathfrak{m}}(h-t)) = 0$ de sorte que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h))$ s'écrit aussi $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty,-tx)$. On a vu plus haut que $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y,-x)$ et donc $d = t\Delta$.

(6) On définit $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ par $\lambda(x^2) = x \otimes x$, $\lambda(xy) = x \otimes y$ et $\lambda(y^2) = y \otimes y$. Comme les générateurs x^2, xy, y^2 de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ ne sont pas libres (ils satisfont des relations), il faut vérifier que ceci a bien un sens : or les relations sont engendrées[2] par $y(x^2) = x(xy)$ et $y(xy) = x(y^2)$, et on a bien $y(x \otimes x) = x \otimes (xy) = x(x \otimes y)$ d'une part et d'autre part $y(x \otimes y) = x \otimes (y^2) = (xy) \otimes y = x(y \otimes y)$ dans $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, donc λ est bien définie. Il est ensuite clair que $\mu\lambda = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}^{\cdot 2}}$.

(7) On a enfin $\ker \mu \oplus \operatorname{im} \lambda = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ avec λ injective donc un isomorphisme de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ sur son image et $\ker \mu = k\Delta$ isomorphe à k. Bref, $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ est isomorphe à la somme directe de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ et de k. ✓

4. Soit M un groupe abélien et $z \in M$ tel que $Nz \neq 0$ pour tout $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que $z \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est pas nul.

Corrigé. Soit z un élément de M d'ordre infini (i.e., $Nz = 0$ implique $N = 0$) et on veut prouver que $z \otimes 1$ est non nul dans $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Imaginons une relation qui donnerait l'annulation de $z \otimes 1$: si on construit le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme le groupe abélien libre engendré par les couples (x,r) (où $x \in M$ et $r \in \mathbb{Q}$) quotienté par les relations qui assurent la bilinéarité, la relation de $z \otimes 1$ à zéro signifie que $(z,1)$ est dans le sous-groupe engendré par un certain ensemble $\mathcal{R}$ (fini) de relations de la forme $(x,r)+(y,r)-(x+y,r)$, $(nx,r)-n(x,r)$ et ainsi de suite. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble (fini, encore) de tous les (x,r) qui interviennent dans une de ces relations, et prenons $N \neq 0$ un dénominateur commun de tous les r pour lesquels il existe un $(x,r) \in \mathcal{C}$. Alors, en envoyant le couple $(x,r) \in \mathcal{C}$ sur l'élément $(Nr)x \in M$, on définit un morphisme $\mathbb{Z}^{\mathcal{C}} \to M$ dont le noyau contient l'ensemble $\mathcal{R}$ de relations (vérification évidente dans chaque cas) et, par conséquent, toute relation engendrée. Ainsi, puisque $(z,1)$ était réputé être dans le sous-groupe engendré par $\mathcal{R}$, il est aussi dans le noyau, c'est-à-dire que $Nz = 0$. Mais ceci contredit l'hypothèse. ✓

5. La flèche $\Phi\colon A^{\mathbb{N}} \otimes A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}^2}$ définie à l'exercice 1 a un sens pour n'importe quel anneau commutatif A (pas seulement pour un corps). On peut se demander si elle est toujours injective : montrons qu'il n'en est rien.

Soit A l'anneau décrit de la façon suivante. Soit $\mathbb{C}[(x_i)]$ l'anneau réunion des anneaux de polynômes $\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_N]$ (à $N+1$ variables) sur tous les entiers naturels N (ainsi, $\mathbb{C}[(x_i)]$ est un anneau de polynômes ayant une infinité de variables, x_i, indicées par les entiers naturels). Soit I son idéal engendré par tous les produits x_ix_j pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On appelle A le quotient

[2] Pour s'en convaincre, on suppose qu'on a $f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 = 0$, on remarque que f_0 est forcément divisible par y et f_2 par x et alors que f_1 appartient à $\mathfrak{m}$, bref, $f_0 = yh_0$, $f_1 = yh_2 - xh_0$ et $f_2 = -xh_2$ et les deux relations annoncées sont bien génératrices.

de $\mathbb{C}[(x_i)]$ par I : autrement dit, A est engendré par une infinité d'éléments $\bar{x}_i$ avec $\bar{x}_i\bar{x}_j = 0$ pour tous i, j.

Dans le A-module $A^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A, on considère l'élément $X = (\bar{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(a) Expliquer comment s'écrit un élément f de A (notamment, on en donnera une base comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et on donnera un sens au « coefficient constant » de f et à son « coefficient devant $\bar{x}_i$ »).

(b) Rappeler pourquoi il existe une forme linéaire $\varphi\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui s'annule sur l'ensemble $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ des suites (c_i) à support fini et telle que $\varphi((1)) = 1$ où $(1) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

(c) En déduire qu'il existe une application A-linéaire $\ell\colon A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui envoie X sur 1, où $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de A-module en décrétant que la multiplication par $\bar{x}_k$ (avec k quelconque) est toujours nulle.

(d) Conclure.

Bonus : Donner un contre-exemple à l'affirmation suivante : « Si A est un anneau (commutatif), M et N deux A-modules et $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ le dual de M, alors l'application canonique $M^\vee \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est injective. »

Corrigé. (a) Tout élément f de $\mathbb{C}[(x_i)]$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables $x_0, \ldots, x_N$: il s'écrit de façon unique comme une somme de monômes $x_0^{d_0} \cdots x_N^{d_N}$. Tous ces monômes pour lesquels $d_0 + \cdots + d_N > 1$ sont dans I : la classe de f dans A s'écrit donc sous la forme $a + c_0\bar{x}_0 + \cdots + c_N\bar{x}_N$. Comme tout élément de I est de degré total au moins 2, la constante 1 et les x_i ne sont pas dedans ni aucune combinaison linéaire non triviale d'entre eux, c'est-à-dire que 1 et $\bar{x}_i$ dans A sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Les coefficients a (coefficient constant) et c_i (coefficient devant $\bar{x}_i$) sont donc bien définis, et 1 et les $\bar{x}_i$ forment une $\mathbb{C}$-base de A. Remarquons que l'application qui à un $f \in A$ associe son coefficient constant $a \in \mathbb{C}$ est un morphisme d'algèbres.

(b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}/\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ contient l'élément non nul (1) (la classe de la suite constante 1), donc on peut trouver une forme linéaire qui vaut 1 dessus, et cette forme linéaire définit une forme linéaire φ sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vaut 1 sur (1) et qui s'annule sur $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$.

(c) La structure de A-module sur $\mathbb{C}$ est celle donnée par le morphisme d'algèbres « coefficient constant » $A \to \mathbb{C}$. Elle a donc bien un sens.

Soit φ comme expliqué en (b). Si $(f_i) \in A^{\mathbb{N}}$, on pose $\ell((f_i)) = \varphi((c_i))$ où c_i est le coefficient de f_i devant $\bar{x}_i$. Il est évident que ℓ est $\mathbb{C}$-linéaire, il s'agit de prouver que $\ell(\bar{x}_k \cdot (f_i)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $(f_i) \in A^{\mathbb{N}}$. Or $\bar{x}_k \cdot f_i = a_i\bar{x}_k$ où a_i est le coefficient constant de f_i : donc $\ell(\bar{x}_k \cdot (f_i)) = \varphi((u_i))$ avec $u_i = 0$ sauf peut-être pour $i = k$ (pour lequel $u_k = a_k$). Mais la propriété de φ entraîne que $\varphi((u_i)) = 0$ dans ce cas, ce qu'on voulait. Enfin, $\ell(X) = 1$ est clair par définition.

(d) On a donc défini $\ell\colon A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ application A-linéaire qui envoie X sur 1. On a alors $\ell \otimes \ell\colon A^{\mathbb{N}} \otimes_A A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C} \otimes_A \mathbb{C}$ qui envoie $X \otimes X$ sur $1 \otimes 1$.

Or $\mathbb{C} \otimes_A \mathbb{C} = \mathbb{C}$ (envoyant $1 \otimes 1$ sur 1) car $\mathbb{C}$, pour la structure de A-module qu'on lui a donné, est simplement le quotient de A par l'idéal J engendré par tous les $\bar{x}_i$ (et que $(A/J) \otimes_A (A/J) = A/J$ en toute généralité pour un anneau commutatif A et un idéal J : cf. les explications données en 2 (a)). Bref, on a une application A-linéaire $A^{\mathbb{N}} \otimes_A A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui envoie $X \otimes X$ sur 1. Ceci prouve que $X \otimes X \in A^{\mathbb{N}} \otimes_A A^{\mathbb{N}}$ n'est pas nul !

Mais $\Phi(X \otimes X) \in A^{\mathbb{N}^2}$ est $(\bar{x}_i\bar{x}_j)_{i,j} = 0$. Donc Φ n'est pas injective.

Bonus : On prend $M = A^{(\mathbb{N})}$, de sorte que $M^\vee = A^{\mathbb{N}}$ (en identifiant la suite (f_i) à la forme linéaire envoyant (v_i) sur $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \cdot v_i$), et $N = A^{\mathbb{N}}$. Alors l'application $M^\vee \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est justement l'application $\Phi\colon A^{\mathbb{N}} \otimes_A A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}^2}$ qu'on a décrite. ✓

6. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs). Tout B-module M peut être considéré comme un A-module par la multiplication $a \bullet x = \varphi(a) \cdot x$ pour $a \in A$ et $x \in M$. Montrer l'équivalence entre (i) toute application A-linéaire $M \to N$ de B-modules est automatiquement B-linéaire, (ii) une quelconque des deux flèches $B \to B \otimes_A B$ (données par $b \mapsto 1 \otimes b$ et $b \mapsto b \otimes 1$) est un isomorphisme (auquel cas les deux coïncident) et (iii) pour n'importe quel B-module M, la flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ est un isomorphisme et les structures de B-module de $B \otimes_A M$ sont les mêmes pour la multiplication[3] sur le facteur de gauche ou de droite.

Corrigé. Montrons que (i) implique (ii). On considère $B \otimes_A B$ comme un B-module par multiplication sur le facteur de gauche. La flèche $b \mapsto 1 \otimes b$ est A-linéaire par définition du produit tensoriel sur A ($a \otimes b = 1 \otimes ab$) : l'hypothèse (i) assure donc qu'elle est B-linéaire, c'est-à-dire en particulier (comme on a choisi de mettre sur $B \otimes_A B$ la structure correspondant à la multiplication sur le facteur de gauche) que $b \otimes b' = 1 \otimes bb'$ pour tous $b, b' \in B$. On peut donc dire que les flèches $B \to B \otimes_A B, b \mapsto 1 \otimes b$ et $B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$ sont des bijections réciproques et (ii) est prouvé.

Montrons à présent que (ii) implique (iii). La flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ se factorise en $M \to B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M \to B \otimes_A M$ où la première flèche est l'isomorphisme naturel $x \mapsto 1 \otimes x$, la deuxième est $b \otimes x \mapsto (1 \otimes b) \otimes x$, et la troisième est $(b \otimes b') \otimes x \mapsto b \otimes b'x$: cette fois, $B \otimes_A B$ a été considéré comme B-module par multiplication sur le facteur de droite. Mais l'hypothèse (ii) assure que $B \to B \otimes_A B$ et donc aussi $B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M$, est un isomorphisme. Donc $M \to B \otimes_A M$, en tant que composée d'isomorphismes, en est un, et comme les deux flèches $B \to B \otimes_A B$ coïncident les deux structures de B-module sur $B \otimes_A M$ coïncident aussi, ce qui démontre (iii).

Montrons enfin que (iii) implique (i) : d'une flèche A-linéaire $M \to N$ entre deux A-modules on déduit une flèche B-linéaire $1 \otimes f\colon B \otimes_A M \to B \otimes_A N$, qui d'après (iii) coïncide avec f elle-même modulo des isomorphismes naturels. Donc f est bien B-linéaire. ✓

([3]) Plus explicitement : $B \otimes_A M$ peut être considéré soit comme le B-module obtenu par extension des scalaires du A-module M à B soit comme le B-module M qu'on a tensorisé par le A-module B.