1. Soit k un corps. On appelle $k^{\mathbb{N}}$ le k-espace vectoriel des suites d'éléments de k. Expliciter l'application k-linéaire naturelle $\Phi\colon k^{\mathbb{N}} \otimes_k k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}^2}$. Montrer que Φ n'est pas surjective, en exhibant un élément qui n'est pas dans son image. Montrer que Φ est injective.

2. On rappelle qu'un $\mathbb{Z}$-module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien.

(a) Rappeler pourquoi, si M est un groupe abélien et n un entier naturel non nul, le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie naturellement à M/nM.

(b) Calculer les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ de deux quelconques des groupes abéliens parmi : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n un naturel non nul variable), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(c) En notant $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers dont presque tous les termes (c'est-à-dire : tous sauf un nombre fini) sont nuls, et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le groupe abélien de toutes les suites d'entiers, expliciter $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et les comparer à $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

3. Soit k un corps, et $A = k[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées x et y sur k (on rappelle qu'il est factoriel). Soit $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal de A engendré par x et y, c'est-à-dire l'idéal des polynômes s'annulant en $(0, 0)$ (pourquoi ?) — qu'on verra notamment comme un A-module.

Pour éviter les confusions, on notera $\mathfrak{m}^{\oplus 2} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ la somme directe (= le produit direct) de deux copies de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ l'idéal produit de $\mathfrak{m}$ avec lui-même. Le but de l'exercice est de déterminer le produit tensoriel $\mathfrak{m}^{\otimes 2} = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}$ avec lui-même au-dessus de A.

(1) On considère $\varphi\colon A^{\oplus 2} \to \mathfrak{m}$ défini par $\varphi(f, g) = fx + gy$. Expliquer pourquoi φ est surjective et montrer que son noyau est l'image d'une application A-linéaire $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}$ injective à préciser.

(2) En déduire que $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ peut se décrire comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module isomorphe à $\mathfrak{m}$ que l'on précisera. On appellera $\varphi_{\mathfrak{m}}$ la surjection $\mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ ainsi définie.

(3) Soit $\mu\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ défini par $\mu(m \otimes m') = mm'$: quelle est l'image de μ ? Quelle est la composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$?

(4) Soit $\Delta = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Montrer que $\mu(\Delta) = 0$ et $\Delta \neq 0$.

(5) Montrer que tout élément du noyau $\ker \mu$ de μ s'écrit de la forme $t\Delta$ pour un $t \in k$: on pourra montrer pour $d \in \ker \mu$ que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$.

(6) Définir une application A-linéaire (non canonique) $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ telle que la composée $\mu\lambda$ soit l'identité.

(7) Conclure quant à la structure de $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ en tant que A-module.

4. Soit M un groupe abélien et $z \in M$ tel que $Nz \neq 0$ pour tout $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que $z \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ n'est pas nul.

5. La flèche $\Phi\colon A^{\mathbb{N}} \otimes A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}^2}$ définie à l'exercice 1 a un sens pour n'importe quel anneau commutatif A (pas seulement pour un corps). On peut se demander si elle est toujours injective : montrons qu'il n'en est rien.

Soit A l'anneau décrit de la façon suivante. Soit $\mathbb{C}[(x_i)]$ l'anneau réunion des anneaux de polynômes $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$ (à $N + 1$ variables) sur tous les entiers naturels N (ainsi, $\mathbb{C}[(x_i)]$ est un anneau de polynômes ayant une infinité de variables, x_i, indicées par les entiers naturels). Soit I son idéal engendré par tous les produits $x_i x_j$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. On appelle A le quotient de $\mathbb{C}[(x_i)]$ par I : autrement dit, A est engendré par une infinité d'éléments $\bar{x}_i$ avec $\bar{x}_i \bar{x}_j = 0$ pour tous i, j.

Dans le A-module $A^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A, on considère l'élément $X = (\bar{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

(a) Expliquer comment s'écrit un élément f de A (notamment, on en donnera une base comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et on donnera un sens au « coefficient constant » de f et à son « coefficient devant $\bar{x}_i$ »).

(b) Rappeler pourquoi il existe une forme linéaire $\varphi\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui s'annule sur l'ensemble $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ des suites (c_i) à support fini et telle que $\varphi((1)) = 1$ où $(1) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

(c) En déduire qu'il existe une application A-linéaire $\ell\colon A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui envoie X sur 1, où $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de A-module en décrétant que la multiplication par $\bar{x}_k$ (avec k quelconque) est toujours nulle.

(d) Conclure.

Bonus : Donner un contre-exemple à l'affirmation suivante : « Si A est un anneau (commutatif), M et N deux A-modules et $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ le dual de M, alors l'application canonique $M^\vee \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est injective. »

6. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs). Tout B-module M peut être considéré comme un A-module par la multiplication $a \bullet x = \varphi(a) \cdot x$ pour $a \in A$ et $x \in M$. Montrer l'équivalence entre (i) toute application A-linéaire $M \to N$ de B-modules est automatiquement B-linéaire, (ii) une quelconque des deux flèches $B \to B \otimes_A B$ (données par $b \mapsto 1 \otimes b$ et $b \mapsto b \otimes 1$) est un isomorphisme (auquel cas les deux coïncident) et (iii) pour n'importe quel B-module M, la flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ est un isomorphisme et les structures de B-module de $B \otimes_A M$ sont les mêmes pour la multiplication[1] sur le facteur de gauche ou de droite.

([1]) Plus explicitement : $B \otimes_A M$ peut être considéré soit comme le B-module obtenu par extension des scalaires du A-module M à B soit comme le B-module M qu'on a tensorisé par le A-module B.