1. On considère le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices de permutation et les matrices de changement de signe sur un nombre pair de coordonnées. On le fait agir naturellement sur les fonctions polynomiales. Montrer que la sous-algèbre des fonctions polynomiales invariantes par G est une algèbre de polynômes et déterminer explicitement un système basique d'invariants.

2. Soit $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ le nombre d'or et $A = \mathbb{Z}[\phi]$. On considère un $\mathbb{R}^4$ euclidien dont le produit scalaire sera noté $(x|y)$ et la base orthonormée standard $(\epsilon_i)_{i=1}^4$. Posons $\mathbf{D}_4 = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : i \neq j\}$ (ensemble de cardinal 24) et soit $\mathbf{S}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^4$ tels que $|\alpha|^2 = 2$ et $(\alpha|\beta) \in A$ pour tout $\beta \in \mathbf{D}_4$. Quel est le cardinal de $\mathbf{S}$? A-t-on $(\alpha|\beta) \in A$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{S}$?

On considère une partie maximale $\mathbf{H}_4$ de $\mathbf{S}$ ayant la propriété que $(\alpha|\beta) \in A$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{H}_4$. Montrer que son cardinal est au plus 120. Montrer que $\mathbf{H}_4$ est stable par réflexion par rapport à l'orthogonal de tout élément de $\mathbf{H}_4$. Montrer que $\mathbf{H}_4$ a pour cardinal exactement 120.

Rappel : Soit $G \subseteq GL_n(k)$ un groupe fini de transformations linéaires de k^n où k est un corps de caractéristique 0. Soit $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ et S^G le sous-anneau des polynômes G-invariants. Si $P(t) = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim_k(\{h \in S^G : \deg h = d\})\, t^k$ (série de Hilbert de S^G), alors on a $P(t) = \frac{F(t)}{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_r})}$, où $F \in \mathbb{Z}[t]$, si S^G est engendré par des polynômes homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_r$, et de plus $P(t) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(I-tA)}$ (formule de Molien).

3. On pose $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_k = \sigma_i\sigma_j$ dans $GL_2(\mathbb{C})$, de sorte que $Q = \{\pm I, \pm\sigma_i, \pm\sigma_j, \pm\sigma_k\}$ forme un sous-groupe d'ordre huit isomorphe au groupe des quaternions. Calculer la série de Hilbert pour $\mathbb{C}[x,y]^Q$. Vérifier que les polynômes $f = x^4 + y^4$ et $g = x^2y^2$ sont invariants : quelle est la série de Hilbert de la sous-algèbre $\mathbb{C}[f,g]$? Trouver un élément h de degré 6 invariant par Q, et en déduire une présentation de $\mathbb{C}[x,y]^Q$ de la forme $\mathbb{C}[f,g,h]/(R)$ où R est une relation que l'on précisera.