1. Soit k un corps algébriquement clos. On considère $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes homogènes de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_m > 0$ en les indéterminées $x_1, \ldots, x_n$. Le but de l'exercice est de montrer que si $n > m$ alors il existe (dans k^n) un zéro commun non-trivial (c'est-à-dire différent de $(0, \ldots, 0)$) à $f_1, \ldots, f_m$. On suppose donc que le seul zéro commun à $f_1, \ldots, f_m$ est $(0, \ldots, 0)$ et on va montrer $n \leq m$.

(1) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que tout monôme de degré (total) $\geq r$ en $x_1, \ldots, x_n$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par $f_1, \ldots, f_m$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]$.

(2) En déduire que tout monôme de degré (total) $\geq r$ en $x_1, \ldots, x_n$ peut s'écrire $g(x_1, \ldots, x_n)$ où g est un polynôme de degré total $< r$ en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients dans l'anneau $A = k[f_1, \ldots, f_m]$ engendré par $f_1, \ldots, f_m$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]$.

(3) En notant $K = k(f_1, \ldots, f_m)$ le corps des fractions de l'anneau intègre A (vu à l'intérieur de $k(x_1, \ldots, x_n)$), en déduire que $K[x_1, \ldots, x_n]$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Conclure que $k(x_1, \ldots, x_n)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

(4) En raisonnant sur le degré de transcendance, conclure que $n \leq m$.

2 (théorème de Tsen). Soit k un corps algébriquement clos, $k(t)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur k. On considère un polynôme $f \in k(t)[x_1, \ldots, x_n]$ homogène de degré d à $n + 1$ indéterminées à coefficients dans $k(t)$, où $0 < d < n$ (le degré est strictement inférieur au nombre d'indéterminées). Montrer que f a un zéro non trivial : il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $k(t)$, non tous nuls, tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Pour cela, on supposera (quitte à chasser les dénominateurs) que les coefficients de f sont dans $k[t]$, et on cherchera une solution $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_\ell = \sum_{j=0}^{N} c_{\ell,j} t^j$, où les $c_{\ell,j}$ sont à déterminer et où N est un entier suffisamment grand : en considérant alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ comme un système en les $c_{\ell,j}$, on appliquera le résultat de l'exercice 1.

3. Soient $k \subseteq K$ deux corps, et soit n un entier naturel. On munit K^n de sa topologie de Zariski[1] : (1) montrer qu'elle induit la topologie de Zariski sur le sous-ensemble k^n. (2) On suppose que k est algébriquement clos : montrer que pour tout fermé de Zariski Z de K^n défini par des équations à coefficients dans k, l'ensemble $Z \cap k^n$ est dense dans Z pour la topologie de Zariski. Ce résultat vaut-il encore si on ne suppose plus k algébriquement clos ?

4. Soit k un corps algébriquement clos et $\mathfrak{I}$ un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ qu'on pourra pour plus de simplicité supposer radical. On appelle $V(\mathfrak{I})$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{I}$, qu'on munit de la topologie de Zariski[2]. Montrer qu'alors $V(\mathfrak{I})$ est connexe (en tant qu'espace topologique) si et seulement si l'anneau quotient $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{I}$ n'a pas d'autres idempotents que 0 et 1 (c'est-à-dire que $e^2 = e$ dans $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{I}$ implique $e = 0$ ou $e = 1$).

5. Soit k un corps, n un entier naturel, et $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une famille de n^2 indéterminées. On appelle Δ le déterminant de la matrice (x_{ij}) (c'est-à-dire dont le coefficient sur la i-ième ligne et j-ième colonne est l'indéterminée x_{ij}) : ainsi, Δ est un élément de l'anneau $k[(x_{ij})]$ des polynômes en les n^2 indéterminées considérées.

(1) Montrer ce polynôme est irréductible (autrement dit, si $\Delta = PQ$ avec $P, Q \in k[(x_{ij})]$, alors l'un de P et Q est constant). Pour cela, on pourra étudier le degré de P et Q par rapport à toutes les variables d'une ligne i_0, puis d'une colonne j_0.

([1]) On rappelle que c'est celle dont les fermés sont les $V(\mathfrak{I})$, lieu des zéros communs d'un idéal $\mathfrak{I} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ de polynômes — les équations de ce fermé.

([2]) La topologie dont les fermés sont les $V(\mathfrak{J})$ pour $\mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{I}$.

(2) Si k est algébriquement clos, montrer (sans utiliser (1)) que pour chaque $0 \leq r \leq n$ l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est un fermé algébrique irréductible dans $\mathbb{M}_n(k)$ (identifié à k^{2n}) muni de sa topologie de Zariski. Pour cela, on pourra utiliser l'application $\psi\colon \mathbb{M}_n(k) \times \mathbb{M}_n(k) \to \mathbb{M}_n(k)$ qui envoie (a, b) sur aJb où J est une matrice judicieusement choisie.

(3) Quel rapport entre les questions (1) et (2) ?