1. Soit A un anneau local[1]. Lorsque M est un A-module de type fini, on appelle (très logiquement) *famille génératrice minimale* un ensemble d'éléments de M qui engendrent celui-ci (en tant que A-module) et dont aucun sous-ensemble strict n'engendre M. Montrer que toutes les familles génératrices minimales de M ont le même cardinal (fini). (Indication : si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on considérera $\tilde{M} = M/\mathfrak{m}M$ l'espace vectoriel résiduel sur le corps $k = A/\mathfrak{m}$. On appliquera le lemme de Nakayama.) Donner un contre-exemple à cette affirmation lorsque A n'est pas un anneau local.

Corrigé. Tout d'abord, on constate que $\tilde{M} = M/\mathfrak{m}M = M \otimes_A k$ est bien, de façon naturelle, un espace vectoriel sur le corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$ de A. Comme M est de type fini, il en va de même de $\tilde{M}$, c'est-à-dire que $\tilde{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie. Appelons n cette dimension. On va montrer que toute famille génératrice minimale de M est de cardinal n.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de M (il n'est pas besoin de supposer I fini). Notons $\tilde{x}_i \in \tilde{M}$ la classe de x_i modulo $\mathfrak{m}M$. La famille $(\tilde{x}_i)_{i\in I}$ engendre l'espace vectoriel $\tilde{M}$, donc il existe $J \subseteq I$ de cardinal n tel que $(\tilde{x}_i)_{i\in J}$ en soit une base. Montrons que $(x_i)_{i\in J}$ engendre encore M. Pour cela, soit N le quotient de M par son sous-module engendré par les x_i avec $i \in J$: il s'agit de prouver que $N = 0$. Or N est un A-module de type fini (comme quotient du A-module de type fini M), et on a $N = \mathfrak{m}N$ puisque tout élément $\bar{y} \in N$ provient d'un élément $y \in M$ qui a une réduction $\tilde{y} \in \tilde{M}$ qui est combinaison linéaire (à coefficients dans k) des $\tilde{x}_i$ pour $i \in J$ donc quitte à modifier y par une combinaison linéaire des x_i avec $i \in J$ (donc sans changer sa classe $\bar{y} \in N$) on peut supposer $\tilde{y} = 0$ c'est-à-dire $y \in \mathfrak{m}M$ et donc $\bar{y} \in \mathfrak{m}N$. Le lemme de Nakayama donne alors $N = 0$, ce qui signifie exactement que les x_i où $i \in J$ engendrent M.

On vient de montrer que toute famille génératrice contient une sous-famille génératrice à n éléments, et celle-ci est manifestement minimale (car il n'est pas possible pour moins de n éléments x_i d'avoir des résidus $\tilde{x}_i$ qui engendrent $\tilde{M}$, lequel est de dimension n). En particulier, toute famille génératrice minimale est de cardinal n.

Si A n'est pas un anneau local, on peut trouver des contre-exemples : sur $A = \mathbb{Z}$, pour $M = A$ le $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 (donc certainement de type fini) les deux parties $\{1\}$ et $\{2, 3\}$ sont génératrices minimales, mais elles n'ont pas le même cardinal. (Il est même facile de voir qu'il existe des familles génératrices minimales arbitrairement grandes.) ✓

2. Les questions suivantes sont indépendantes.

(1) Soit A la partie de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes dont le coefficient de degré 1 (ou, si on préfère, la dérivée à l'origine) est nul : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle n'est pas intégralement close (quelle est le corps des fractions de A, et quelle est la fermeture intégrale de A dedans ?).

(2) Soit A la partie de $\mathbb{C}[x, y]$ formée des polynômes n'ayant que des monômes de degré total pair (ou, si on préfère, vérifiant $p(-x, -y) = p(x, y)$) : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x, y]$, montrer qu'elle est de type fini sur $\mathbb{C}$, et montrer qu'elle est intégralement close (de nouveau, quel est le corps des fractions de A ?). Montrer cependant que A n'est pas un anneau factoriel.

(3) Soit A la partie de $\mathbb{C}[t]$ formée des polynômes n'ayant que des monômes de degré total pair (ou, si on préfère, vérifiant $p(-t) = p(t)$) : montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$,

([1]) On rappelle qu'un anneau (commutatif) est dit *local* lorsque l'ensemble de ses éléments non inversibles forme un idéal $\mathfrak{m}$, qui est alors l'unique idéal maximal de A (un idéal maximal $\mathfrak{m}$ est un idéal strict maximal pour l'inclusion — ou, de façon équivalente, tel que $A/\mathfrak{m}$ est un corps).

de type fini sur $\mathbb{C}$ et intégralement close, et montrer que A est factoriel (ou, mieux, décrire un isomorphisme entre A et un anneau connu pour être factoriel).

(4) Soit A la partie de $\mathbb{C}[x,y]$ formée des polynômes constants sur l'axe $x=0$, c'est-à-dire n'ayant aucun coefficient en y^i pour $i>0$. Montrer que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x,y]$ mais qu'elle *n'est pas* noethérienne (on pourra considérer l'idéal I_n de A engendré par les xy^i pour $0 \leq i \leq n$). Quel est le corps des fractions de A ? L'élément y, ou, plus généralement, un polynôme non constant en y, est-il entier sur A ? L'anneau A est-il intégralement clos ? Factoriel ?

Corrigé. (1) Manifestement, A est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[t]$, contenant 1 : il s'agit donc de voir qu'elle est stable par multiplication. Or si $p,q \in \mathbb{C}[t]$ vérifient $p'(0)=0$ et $q'(0)=0$ alors $(pq)'=p'q+pq'$ s'annule aussi en 0. Ceci prouve que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$. Pour s'assurer qu'elle est de type fini, on constate que $A=\mathbb{C}[t^2,t^3]$ (autrement dit, A est engendré, comme $\mathbb{C}$-algèbre, par t^2 et t^3) : c'est clair car $t^2,t^3 \in A$ et tout monôme t^n de degré n différent de 1 est produit d'une certaine puissance de t^2 et d'une certaine puissance de t^3 (il s'ensuit que toute somme de tels monômes, bref, tout élément de A, est dans $\mathbb{C}[t^2,t^3]$).

Maintenant, A est un anneau intègre (comme sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$ qui est intègre) donc on peut parler de son corps des fractions $K=\mathbb{C}(t^2,t^3)$, qu'on peut voir comme un sous-corps de $\mathbb{C}(t)$ (puisque A est un sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$), et comme $t=(t^3)/(t^2)$ on voit que $t\in K$ donc manifestement $K=\mathbb{C}(t)$: c'est-à-dire que A a le même corps des fractions $\mathbb{C}(t)$ que $\mathbb{C}[t]$. Enfin, $t\in K$ est racine du polynôme unitaire $P(u)=u^2-t^2\in A[u]$, donc t est entier sur A, et comme $t\notin A$ on en déduit que A n'est pas intégralement clos.

(2) Tout d'abord, il y a bien équivalence entre dire que $p(-x,-y)=p(x,y)$ et dire que p n'a que des monômes de degré total pair : une implication est évidente, et quant à l'autre on voit facilement (à l'aide d'un développement à l'origine) que les monômes du plus petit degré impair s'annulent. Manifestement, A est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x,y]$, contenant 1 : il s'agit donc de voir qu'elle est stable par multiplication. Or si $p,q\in\mathbb{C}[x,y]$ vérifient $p(-x,-y)=p(x,y)$ et $q(-x,-y)=q(x,y)$ alors pq le vérifie aussi. Ceci prouve que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[x,y]$. Pour s'assurer qu'elle est de type fini, on constate que $A=\mathbb{C}[x^2,xy,y^2]$ (autrement dit, A est engendré, comme $\mathbb{C}$-algèbre, par x^2, xy et y^2) : c'est clair car $x^2,xy,y^2\in A$ et tout monôme x^dy^{2n-d} de degré $2n$ est produit de puissances de ces monômes (il s'ensuit que toute somme de tels monômes, bref, tout élément de A, est dans $\mathbb{C}[x^2,xy,y^2]$).

Maintenant, A est un anneau intègre (comme sous-anneau de $\mathbb{C}[x,y]$ qui est intègre) donc on peut parler de son corps des fractions $K=\mathbb{C}(x^2,xy,y^2)$, qu'on peut voir comme un sous-corps de $\mathbb{C}(x,y)$ (puisque A est un sous-anneau de $\mathbb{C}[x,y]$), et même du sous-corps K_0 du corps des fractions rationnelles $h\in\mathbb{C}(x,y)$ vérifiant $h(-x,-y)=h(x,y)$. Inversement, si $h\in K_0$ est une fraction rationnelle en les indéterminées x,y qui vérifie $h(-x,-y)=h(x,y)$ alors en écrivant $h=p/q$ où $p,q\in\mathbb{C}[x,y]$, on a soit $p(-x,-y)=p(x,y)$ et de même pour q (donc immédiatement $p/q\in K$) soit $p(-x,-y)=-p(x,y)$ et de même pour q et dans ce cas quitte à multiplier p et q par x on est ramené à $p/q\in K$: bref, K_0, le corps des fractions rationnelles vérifiant $h(-x,-y)=h(x,y)$, est le corps $K=\mathbb{C}(x^2,xy,y^2)$ des fractions de A. (On peut également remarquer que l'extension $\mathbb{C}(x,y)/\mathbb{C}(x^2,xy,y^2)$ est galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont l'unique élément non trivial est $\sigma\colon h(x,y)\mapsto h(-x,-y)$.)

Enfin, si $h\in K$ est entier sur A alors en particulier il est entier sur $\mathbb{C}[x,y]$ donc il appartient à $\mathbb{C}[x,y]$ (car $\mathbb{C}[x,y]$ est intégralement clos, étant factoriel), donc $h\in K\cap\mathbb{C}[x,y]$, c'est-à-dire que h est un polynôme à deux indéterminées vérifiant $h(-x,-y)=h(x,y)$, et ceci montre $h\in A$. Donc A est bien intégralement clos. Pour finir, A n'est pas factoriel car les trois éléments x^2,xy,y^2 sont irréductibles mais le carré de l'un est égal au produit des deux autres,

$(xy)^2 = (x^2)(y^2)$, ce qui contredit l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.

(3) La démonstration du fait que A est intégralement clos est tout à fait analogue à l'exemple précédent : tout d'abord, il y a bien équivalence entre dire que $p(-t) = p(t)$ et dire que p n'a que des monômes de degré total pair. Manifestement, A est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[t]$, contenant 1 et stable par multiplication (si $p, q \in \mathbb{C}[t]$ vérifient $p(-t) = p(t)$ et $q(-t) = q(t)$ alors pq le vérifie aussi) : ceci prouve que A est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[t]$. Pour s'assurer qu'elle est de type fini, on constate que $A = \mathbb{C}[t^2]$: c'est clair car $t^2 \in A$ et tout monôme t^{2n} de degré $2n$ est une puissance de t^2.

Maintenant, A est un anneau intègre (comme sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$ qui est intègre) donc on peut parler de son corps des fractions $K = \mathbb{C}(t^2)$, qu'on peut voir comme un sous-corps de $\mathbb{C}(t)$ (puisque A est un sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$), et comme dans le cas précédent K est bien le corps des fractions rationnelles $h \in \mathbb{C}(t)$ vérifiant $h(-t) = h(t)$. (On peut de nouveau remarquer que l'extension $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^2)$ est galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont l'unique élément non trivial est $\sigma\colon h(t) \mapsto h(-t)$.) Enfin, si $h \in K$ est entier sur A alors en particulier il est entier sur $\mathbb{C}[t]$ donc il appartient à $\mathbb{C}[t]$ (car $\mathbb{C}[t]$ est intégralement clos, étant factoriel), donc $h \in K \cap \mathbb{C}[t]$, c'est-à-dire que h est un polynôme à une indéterminées vérifiant $h(-t) = h(t)$, et ceci montre $h \in A$: donc A est bien intégralement clos.

On peut cependant faire mieux : en envoyant u sur t^2, on détermine un isomorphisme entre $\mathbb{C}[u]$ (anneau des polynômes en une indéterminée u) et $A = \mathbb{C}[t^2]$ (sous-anneau de $\mathbb{C}[t]$ engendré par t^2, comme on l'a expliqué), puisque tout monôme dans A est de la forme t^{2n} (image de u^n, donc) avec n uniquement déterminé. Étant isomorphe à $\mathbb{C}[u]$, il est certain que A est factoriel...

(4) Il n'y a pas de difficulté à vérifier que $p \in \mathbb{C}[x, y]$ est constant sur l'axe $x = 0$ si et seulement si p n'a aucun coefficient en y^i pour $i > 0$ (puisque justement la restriction $p(0, y)$ à l'exe des ordonnées est donné par ces coefficients). Comme dans les exemples précédents, le fait que A soit un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de A est clair, et il contient 1 : pour vérifier qu'il s'agit d'une sous-$\mathbb{C}$-algèbre, il s'agit de constater qu'il est stable par multiplication ; or si $p(0, y)$ et $q(0, y)$ sont constants, avec $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$, il est clair que pq vérifie aussi cette propriété, soit $pq \in A$.

Soit I_n l'idéal de A engendré par les xy^i pour $0 \leq i \leq n$. Autrement dit, I_n est formé des $p \in A$ qui s'annulent à l'origine (n'ont pas de coefficient constant) et n'ont aucun coefficient en xy^i si $i > n$: en effet, ces propriétés sont certainement vérifiées pour les générateurs de I_n et sont stables par multiplication par un monôme dans A, et réciproquement, tout monôme de la forme $x^s y^i$ avec $s > 1$ est bien dans I_n, ce qui prouve l'égalité. Mais cette description montre que les I_n forment une suite strictement croissante d'idéaux ; leur réunion, I_∞, est l'idéal des $p \in A$ qui s'annulent à l'origine (donc sur tout l'axe $x = 0$).

Le corps des fractions de l'anneau intègre A est certainement inclus dans $\mathbb{C}(x, y)$. Il contient évidemment A ; mais il contient également $y^i = (xy^i)/x$ pour tout i, c'est-à-dire qu'il contient $\mathbb{C}[x, y]$, donc c'est $\mathbb{C}(x, y)$ tout entier.

Montrons que $y \in \mathbb{C}(x, y)$ n'est pas entier sur A. Soit $f \in A[u]$ unitaire, disons de degré n : alors $f(y)$ comporte le monôme y^n, qui ne peut pas être annulé par un quelconque autre terme (puisque tout autre terme comporte le monôme y^i avec $0 < i < n$ ou bien appartient à A). Il s'ensuit que y n'est pas entier sur A. Plus généralement, aucun polynôme non constant en y n'est entier sur A (soit en utilisant le même raisonnement, soit en observant que y serait entier sur A qu'on aurait étendu de ce polynôme, et on vient de voir que y n'est pas entier sur A). Par conséquent, la fermeture intégrale de A dans son corps des fractions $\mathbb{C}(x, y)$, qui est un anneau compris entre A lui-même et $\mathbb{C}[x, y]$ (puisque ce dernier est intégralement clos) ne contient aucun y^i pour $i > 0$ ou aucune combinaison de tels monômes : c'est donc que la fermeture intégrale en question est réduite à A, et on vient de montrer que A est intégralement clos.

Enfin, on peut expliquer que A n'est pas factoriel : chacun des xy^i avec $i \in \mathbb{N}$ est certainement irréductible dans A, mais on a $(xy)^2 = x(xy^2)$ ce qui contredit l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. ✓

3. (1) On rappelle que le radical (de Jacobson) $\operatorname{rad} A$ d'un anneau (commutatif) A est l'intersection de tous ses idéaux maximaux. Montrer que $x \in A$ est dans $\operatorname{rad} A$ si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $1 + ax \in A^\times$ (où $A^\times$ désigne le groupe des unités — c'est-à-dire les éléments inversibles de A).

(2) On appelle nilradical $\operatorname{Nil} A$ d'un anneau (commutatif) A l'intersection de tous ses idéaux premiers[2]. Montrer que $\operatorname{Nil} A$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A. (Indication : on pourra être amené à considérer, donné $x \in A$ non nilpotent, un élément maximal pour l'inclusion parmi les idéaux ne contenant aucune puissance de x — et montrer que cet idéal est premier.)

(3) Manifestement, $\operatorname{Nil} A \subseteq \operatorname{rad} A$ pour tout anneau (commutatif) A (pourquoi ?). Montrer que si A est un anneau *artinien*, c'est-à-dire que toute suite d'idéaux décroissante pour l'inclusion stationne, alors il y a égalité. (Indication : si $\mathfrak{R} = \operatorname{rad} A$, on considérera la suite décroissante $\mathfrak{R}^k$ des puissances de l'idéal $\mathfrak{R}$ et on appliquera le lemme de Nakayama. Pour simplifier, on pourra admettre le résultat suivant : tout anneau artinien est noethérien.)

(4) Montrer que si A est un anneau (commutatif) quelconque alors $\operatorname{rad}(A[t]) = \operatorname{Nil}(A[t]) = (\operatorname{Nil} A)[t]$. (On montrera d'abord que $(A/\operatorname{Nil} A)[t]$ est réduit, puis on utilisera les critères prouvés en (1) et (2).)

Corrigé. (1) Supposons par l'absurde que $x \in \operatorname{rad} A$ et que pour un certain $a \in A$ l'élément $1 + ax$ n'est pas une unité : alors $1 + ax$ engendre un idéal strict de A qui est donc contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme $x \in \operatorname{rad} A \subseteq \mathfrak{m}$ on a $ax \in \mathfrak{m}$ donc $1 = (1 + ax) - (ax) \in \mathfrak{m}$, ce qui est une contradiction.

Réciproquement, supposons $x \notin \mathfrak{m}$ pour un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Alors $A/\mathfrak{m}$ est un corps (car il n'a aucun idéal strict autre que $\{0\}$), donc il existe $\bar{a} \in A/\mathfrak{m}$ tel que $\bar{a} \cdot \bar{x} = -1$, ce qui donne $1 + ax \in \mathfrak{m}$ (où a est un relèvement quelconque de $\bar{a}$) donc $1 + ax$ n'est pas une unité.

(2) Si $x \in A$ est nilpotent, disons $x^n = 0$, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A on a $x \in \mathfrak{p}$ (cela se voit en utilisant la propriété $(xy \in \mathfrak{p}) \implies (x \in \mathfrak{p}) \vee (y \in \mathfrak{p})$ et une récurrence immédiate sur n). Donc $x \in \operatorname{Nil} A$.

Réciproquement, supposons que $x \in A$ n'est pas nilpotent. Alors il existe des idéaux disjoints de $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ (par exemple, l'idéal nul vérifie cette condition). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal pour l'inclusion parmi ceux-ci (on applique ici le lemme de Zorn). Montrons que $\mathfrak{p}$ est premier. Pour cela, supposons $y \notin \mathfrak{p}$ et $z \notin \mathfrak{p}$: alors par maximalité de $\mathfrak{p}$, il existe une puissance x^m de x telle que $x^m = ay + p$ avec $a \in A$ et $p \in \mathfrak{p}$ (en effet, l'idéal $(y) + \mathfrak{p} = \{ay + p : a \in A, p \in \mathfrak{p}\}$, engendré par $\mathfrak{p}$ et y, n'est pas disjoint de l'ensemble des puissances de x), et de même il existe une puissance x^n de x qui s'écrit $x^n = bz + q$ avec $b \in A$ et $q \in \mathfrak{p}$. On a alors $x^{mn} = abxy + r$ avec $r = ayq + bzp + pq \in \mathfrak{p}$, donc $xy \notin \mathfrak{p}$. On a donc montré que $\mathfrak{p}$ est premier, et comme $x \notin \mathfrak{p}$, on a $x \notin \operatorname{Nil} A$.

(3) On a $\operatorname{Nil} A \subseteq \operatorname{rad} A$ car tout idéal maximal est premier.

Supposons maintenant A artinien. Soit $\mathfrak{R} = \operatorname{rad} A$, et considérons la suite $\mathfrak{R}^k$ des puissances successives de l'idéal $\mathfrak{R}$. Comme A est artinien, cette suite doit stationner, disons

([2]) Un idéal (strict) $\mathfrak{p}$ est dit premier lorsque $A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre, ou, de façon équivalente, lorsque $xy \in \mathfrak{p}$ implique $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$.

$\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{k+1}$: appelons $\mathfrak{R}^\infty = \mathfrak{R}^N$ la valeur à laquelle elle stationne. Si on admet que tout anneau artinien est noethérien, alors $\mathfrak{R}$, étant un sous-module du module de type fini A sur l'anneau noethérien A, est de type fini, donc le lemme de Nakayama permet de conclure de $\mathfrak{R}^\infty = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}^\infty$ qu'on a $\mathfrak{R}^\infty = 0$: donc le produit de N éléments quelconques de $\mathfrak{R}$ est nul, et en particulier tout élément de $\mathfrak{R}$ est nilpotent ce qui prouve $\mathfrak{R} \subseteq \operatorname{Nil} A$, d'où l'égalité.

Expliquons comment faire sans admettre que tout anneau artinien est noethérien. Supposons par l'absurde que $\mathfrak{R}^\infty \neq 0$. Considérons l'ensemble $\mathscr{L}$ des idéaux *de type fini* L tels que $\mathfrak{R}^\infty \cdot L \neq 0$. Manifestement $\mathscr{L}$ n'est pas vide : l'anneau A tout entier appartient à $\mathscr{L}$. Soit maintenant L un élément *minimal* (pour l'inclusion) de $\mathscr{L}$: un tel élément existe puisque A est artinien (donc tout ensemble non vide d'idéaux a un élément minimal). Prouvons maintenant $\mathfrak{R} \cdot L = L$. Pour cela, soit $x \in \mathfrak{R}^\infty \cdot L$ non nul : comme $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}^\infty = \mathfrak{R}^\infty$, on peut écrire $x = \sum_i y_i z_i t_i$ où $y_i \in \mathfrak{R}$, $z_i \in \mathfrak{R}^\infty$ et $t_i \in L$; soit alors L' l'ideal (de type fini) engendré par les $y_i t_i$: manifestement, $L' \subseteq L$ et même $L' \subseteq \mathfrak{R} \cdot L$, et par ailleurs $\mathfrak{R}^\infty \cdot L' \neq 0$ (puisqu'il contient x) ; par minimalité de L on a alors $L' = L$ donc $\mathfrak{R} \cdot L = L$ et le lemme de Nakayama donne $L = 0$ ce qui est absurde, d'où la conclusion souhaitée $\mathfrak{R}^\infty = 0$.

(4) Tout d'abord, remarquons que $A/\operatorname{Nil} A$ est un anneau réduit (il n'a pas de nilpotents non nuls car ceux-ci seraient nilpotents dans A donc seraient dans $\operatorname{Nil} A$). Il s'ensuit que $(A/\operatorname{Nil} A)[t]$ est aussi un anneau réduit, et c'est aussi $A[t]/(\operatorname{Nil} A)[t]$. Il s'ensuit que $(\operatorname{Nil} A)[t] \supseteq \operatorname{Nil}(A[t])$, et l'inclusion réciproque est évidente. Par ailleurs, on sait qu'on a toujours $\operatorname{Nil}(A[t]) \subseteq \operatorname{rad}(A[t])$, et on va prouver l'inclusion réciproque. Soit donc $f(t) = c_0 + \cdots + c_n t^n \in \operatorname{rad}(A[t])$: le critère de la question (1) permet d'affirmer que $1 + tf(t) \in A[t]^\times$, c'est-à-dire $1 + c_0 t + \cdots + c_n t^{n+1} \in A[t]^\times$. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier : comme $1 + tf(t)$ doit être inversible dans $(A/\mathfrak{p})[t]$ et que les seuls polynômes inversibles sur un anneau intègre (ici $A/\mathfrak{p}$) sont les constantes, on voit que $c_0, \ldots, c_n \in \mathfrak{p}$ (ils sont nuls dans $A/\mathfrak{p}$). Ceci étant vrai pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, on a $c_0, \ldots, c_n \in \operatorname{Nil} A$. ✓