1. Exprimer les racines des polynômes suivants (on indiquera une éventuelle simplification), puis calculer leurs groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$: (a) $t^4 - 4t^2 = 0$, (b) $t^4 - 4t^2 - 45 = 0$, (c) $t^4 - 4t^2 - 5 = 0$, (d) $t^4 - 4t^2 - 1 = 0$, (e) $t^4 - 4t^2 + 2 = 0$ et (f) $t^4 - 4t^2 + 1 = 0$.

2. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes sur $\mathbb{Q}$ (on pourra réduire modulo 2, 3 et/ou 5) : (a) $t^4 + 2t^2 + t + 3 = 0$, (b) $t^4 + 3t^3 - 3t - 2 = 0$, (c) $t^6 + 22t^5 - 9t^4 + 12t^3 - 37t^2 - 29t - 15 = 0$.

3. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes sur le corps $\mathbb{C}(\lambda)$ des fractions rationnelles en une indéterminée : (a) $t^n + \lambda = 0$, (b) $t^3 + t + \lambda = 0$, (c) $t^4 + 2(1 - 2\lambda)t^2 + 1 = 0$, (†) (d) $t^5 - \lambda t^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$.

4. On se propose de montrer que l'extension de corps $\mathbb{Q}(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})})/\mathbb{Q}$ est galoisienne avec pour groupe de Galois le groupe Q des quaternions (i.e., Q est le groupe ayant huit éléments $1, s_i, s_j, s_k, t, ts_i, ts_j, ts_k$, où t est central, $t^2 = 1$, et $s_i^2 = s_j^2 = s_k^2 = s_i s_j s_k = t$).

(1) Posons $\alpha = (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})$, et soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$: expliquer pourquoi l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois produit de deux groupes cycliques d'ordre 2. On notera $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ les trois éléments non triviaux.

(2) Montrer que pour chaque $\sigma = \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ la quantité $\sigma(\alpha)/\alpha$ est le carré d'un élément de K que l'on précisera.

(3) Soit $\delta = \sqrt{\alpha}$ et $L = \mathbb{Q}(\delta)$. Montrer que $\delta \notin K$ (on pourra utiliser la question précédente). Quel est le groupe de Galois de L/K ? On note τ son générateur, qu'on considérera également comme un élément de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ (dont $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un sous-groupe).

(4) Définir des automorphismes $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_j$ de $L = K(\sqrt{\alpha})$ sur $\mathbb{Q}$ qui prolongent σ_i et σ_j respectivement. On posera $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j$.

(5) Calculer la loi de groupe et conclure.

5 (l'endécagone régulier). Expliquer de façon détaillée (mais sans faire les calculs) comment on peut démontrer que $\cos\frac{2\pi}{11}$ vaut

$$\begin{aligned}-\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\sqrt[5]{\frac{11}{4}}\,\Bigg(&\Big(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}-20i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+25i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89-25\sqrt{5}+20i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-25i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}-25i\sqrt{10+2\sqrt{5}}-20i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\\
&+\Big(-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big)\sqrt[5]{-89+25\sqrt{5}+25i\sqrt{10+2\sqrt{5}}+20i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\Bigg)\end{aligned}$$

(ici $\sqrt[5]{z}$ désigne la détermination principale de la racine cinquième, c'est-à-dire celle dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$).