1 (algèbres de Clifford). Soit k un corps, qu'on supposera pour simplifier de caractéristique différente de 2 (c'est-à-dire que $2 \neq 0$ dans k), V un k-espace vectoriel de dimension finie et $q\colon V \to k$ une forme quadratique[1] sur V. On appelle *algèbre de Clifford* associée à q le quotient $C(q)$ de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ de V par son idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes x - q(x)\,1$ (où x parcourt V). Montrer que $C(q)$ a une dimension finie sur k qu'on calculera. Que vaut $C(q)$ si $q = 0$? Que vaut $C(q)$ si q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ donnée par $q(x) = -x^2$ (respectivement $q(x) = +x^2$) ?

Montrer que pour tout r il existe un espace vectoriel de dimension r de matrices réelles (de taille non précisée) dans lequel seule la matrice nulle n'est pas inversible. (Qu'en est-il sur $\mathbb{C}$?)

Corrigé. Soit $v_1, \ldots, v_r$ une base orthogonale[2] de V pour q. Notons e_i l'image de v_i dans $C(q)$. Cherchons à déterminer les relations entre les e_i. Tout d'abord, on a $e_i^2 = q(v_i)$ pour tout i. D'autre part, pour $i \neq j$ on a $(e_i + e_j)^2 = q(v_i + v_j) = q(v_i) + q(v_j)$ (cette dernière égalité utilisant l'orthogonalité) mais aussi $(e_i+e_j)^2 = e_i^2+e_j^2+e_ie_j+e_je_i = q(v_i)+q(v_j)+e_ie_j+e_je_i$, ce qui prouve que $e_je_i = -e_ie_j$. Par conséquent, le produit d'un nombre quelconque des e_i se ramène au signe près à un produit ordonné, et ensuite à une constante près à des e_i tous distincts, donc la dimension de $C(q)$ est au plus 2^r (le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, r\}$) où r est la dimension de V.

Pour montrer que la dimension est exactement 2^r, on appelle temporairement $C'(q)$ le k-espace vectoriel dont une base est l'ensemble des produits formels $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ avec $i_1 < \ldots < i_s$ dans $\{1, \ldots, r\}$ (il est donc de dimension 2^r exactement), qu'on munit d'une structure d'algèbre en imposant les relations $e_je_i = -e_ie_j$ et $e_i^2 = q(e_i)\,1$ (autrement dit, un produit quelconque d'éléments de la base se forme en prenant le produit formellement et en se ramenant à un $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ avec $i_1 < \ldots < i_s$ grâce à ces deux relations) ; l'associativité de $C'(q)$ est claire. On vient de voir que $C'(q)$ se surjecte sur $C(q)$ (par la flèche évidente) et on veut la réciproque ; comme $C(q)$ est un quotient de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V)$ et qu'on a une flèche surjective évidente $T^\bullet(V) \to C'(q)$, il s'agit simplement de voir que réciproquement toutes les relations $x^2 = q(x)$ (pour $x \in V$) sont vérifiées dans $C'(q)$, de sorte qu'on aura une surjection dans l'autre sens, et $C(q)$ et $C'(q)$ seront bien isomorphes. Or manifestement si on décompose $x = \sum_i \xi_i v_i$ sur la base v_i on développe $x^2 = \sum_{i,j} \xi_i\xi_j e_ie_j$ et grâce aux relations d'anticommutation entre les e_i on a $x^2 = \sum_i \xi_i^2 e_i^2 = \sum_i \xi_i^2 q(e_i) = q(x)$, comme on le voulait.

Si $q = 0$, l'algèbre de Clifford $C(q)$ est simplement l'algèbre extérieure $\wedge^\bullet(V)$ de V. Pour $q(x) = -x^2$ sur $\mathbb{R} = \mathbb{R}e$, on a $e^2 = q(e) = -1$ donc $C(q) = \mathbb{C}$ (en envoyant $\alpha + \beta e$ sur $\alpha + \beta i$) ; pour $q(x) = x^2$, on a $e^2 = 1$ et on voit que $C(q) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (en envoyant $\alpha + \beta e$ sur $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$).

Enfin, donnons-nous $r \geq 0$, et soit V un espace vectoriel réel de dimension r muni d'une forme quadratique q anisotrope (i.e., le seul $x \in V$ tel que $q(x) = 0$ est $x = 0$: par exemple $V = \mathbb{R}^r$ muni de la forme euclidienne q usuelle). La multiplication par un $x \in V$ non nul quelconque sur l'algèbre de Clifford $C(q)$ est bijective (son inverse est $x/q(x)$), donc définit, quitte à prendre une base quelconque de $C(q)$ une matrice de taille $2^r \times 2^r$ inversible, et l'espace vectoriel de dimension r de toutes les matrices de multiplication par des $x \in V$ ne contient donc que la matrice nulle comme matrice non inversible, ce qu'on souhaitait. Sur $\mathbb{C}$, le plus grand espace vectoriel possible de matrices inversibles ou zéro est de dimension 1, car le déterminant est polynomial et doit donc posséder un zéro non trivial dès que la dimension est au moins 2 (prendre une droite quelconque ne passant pas par l'origine). ✓

(1) Autrement dit, on suppose que $q(cx) = c^2x$ pour tout $c \in k$ et $x \in V$ et que $q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire en x et y (cette définition convient même en caractéristique 2).
(2) On utilise ici le fait que la caractéristique de k n'est pas 2.

2 (K-théorie de Milnor des corps finis). Soit F un corps. On appellera $K_1(F)$ le groupe multiplicatif $F^\times$ considéré comme un $\mathbb{Z}$-module (et noté additivement) : on notera $\ell\colon F^\times \to K_1(F)$ l'isomorphisme en question (ainsi, $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$ par définition). Notons maintenant $K_\bullet(F)$ le quotient de l'algèbre tensorielle de $K_1(F)$ (sur $\mathbb{Z}$) par l'idéal bilatère engendré par les $\ell(a) \otimes \ell(1-a)$ pour $a \in F \setminus \{0,1\}$. L'algèbre $K_\bullet(F)$ s'appelle la *K-théorie de Milnor* de F ; comme la graduation de l'algèbre tensorielle passe au quotient, on peut bien sûr définir $K_n(F)$ comme la partie homogène de degré n (autrement dit, engendrée par les $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)$ pour $a_1,\ldots,a_n \in F^\times$).

Montrer que :

(i) $\ell(a)\,\ell(-a) = 0$ pour tout $a \in F^\times$ (on pourra faire intervenir $\ell(1-\frac{1}{a})$).

(ii) $\ell(a)\,\ell(b) = -\ell(b)\,\ell(a)$ pour tous $a, b \in F^\times$ (on pourra développer $\ell(ab)\,\ell(-ab)$), et par conséquent $yx = (-1)^{mn}xy$ si $x \in K_m(F)$ et $y \in K_n(F)$.

(iii) $\ell(a)^2 = \ell(-1)\,\ell(a) = \ell(a)\,\ell(-1)$ pour tout $a \in F^\times$.

(iv) $\ell(a)\,\ell(b) = \ell(a+b)\,\ell(-\frac{b}{a})$ lorsque $a, b \in F^\times$ sont tels que $a + b \neq 0$ (on observera que $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$).

(v) $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n) = 0$ lorsque $a_1,\ldots,a_n \in F^\times$ sont tels que $a_1+\cdots+a_n \in \{0,1\}$ (on pourra procéder par récurrence sur n et faire intervenir $a_1 + a_2$).

Si F est un corps fini, montrer que $K_2(F)$ est engendré par $\ell(g)^2$ où g est un générateur de $F^\times$, et que $2\ell(g)^2 = 0$. Puis montrer qu'en fait $\ell(g)^2 = 0$ (lorsque F est de caractéristique $\neq 2$, on utilisera des éléments x et y tels que $g(x^2 + y^2) = 1$). On en déduit $K_n(F) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Corrigé. (i) Si $a = 1$ alors $\ell(a) = 0$ et on a fini. Sinon, $\ell(\frac{1}{a})\,\ell(1-\frac{1}{a}) = 0$, donc $\ell(a)\,\ell(1-\frac{1}{a}) = 0$ et en ajoutant $\ell(a)\,\ell(-a)$ on trouve $\ell(a)\,\ell(-a) = \ell(a)\,\ell(1-a) = 0$.

(ii) On a $\ell(ab)\,\ell(-ab) = \ell(a)\,\ell(-a) + \ell(a)\,\ell(b) + \ell(b)\,\ell(a) + \ell(b)\,\ell(-b)$, et d'après (i) on en déduit $\ell(a)\,\ell(b) + \ell(b)\,\ell(a) = 0$.

(iii) On a $0 = \ell(a)\,\ell(-a) = \ell(a)^2 + \ell(a)\,\ell(-1) = \ell(a)^2 - \ell(-1)\,\ell(a)$ donc $\ell(a)^2 = \ell(-1)\,\ell(a)$, et ceci est symétrique.

(iv) Posons $c = a + b$. Comme $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, on a $0 = \ell(\frac{a}{c})\,\ell(\frac{b}{c}) = \ell(a)\,\ell(b) - \ell(a)\,\ell(c) - \ell(c)\,\ell(b) + \ell(c)^2$. Donc (en utilisant les résultats précédents) $\ell(a)\,\ell(b) = -\ell(c)\,\ell(a) + \ell(c)\,\ell(b) + \ell(c)\,\ell(-1) = \ell(c)\,\ell(-\frac{b}{a})$.

(v) On procède par récurrence sur n. Les cas $n = 1, 2$ sont déjà connus. Si $a_1 + a_2 = 0$ alors déjà $\ell(a_1)\,\ell(a_2) = 0$ et en particulier $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n) = 0$: on suppose donc que $c = a_1 + a_2$ n'est pas nul : alors on a vu $\ell(a_1)\,\ell(a_2) = \ell(c)\,\ell(-\frac{a_2}{a_1})$. Comme l'hypothèse de récurrence assure $\ell(c)\,\ell(a_3)\cdots\ell(a_n) = 0$, ceci conclut.

Si F est un corps fini à q éléments, et g un générateur de $F^\times$, alors tout élément de $K_1(F)$ s'écrit $r\ell(g)$ pour un certain r (qu'on peut prendre entre 0 et $q-1$). Il s'ensuit que $K_n(F)$ est engendré par $\ell(g)^n$. On a déjà vu (en (ii)) que $2\ell(g)^2 = 0$.

Reste à expliquer pourquoi $r\ell(g)^2 = 0$ pour un certain r impair : si F est de caractéristique 2 on a $(q-1)\ell(g) = 0$ — donc en particulier $(q-1)\,\ell(g)^2 = 0$ — avec $q-1$ impair, ce qui conclut. Si F est de caractéristique impaire, on rappelle que tout élément de F est somme de deux carrés (en effet, si $c \in F$, l'image de $x \mapsto x^2$ et l'image de $y \mapsto c - y^2$ ont chacune $\frac{q+1}{2}$ éléments, donc il y a un x et un y tels que $x^2 = c - y^2$, ce qu'on voulait) : notamment on peut trouver x et y tels que $g\,x^2 + g\,y^2 = 1$. On a alors nécessairement $x, y \neq 0$ (sinon g serait un carré, ce qui contredit le fait qu'il est un générateur de $F^\times$). Donc $(\ell(g) + 2\ell(x))\,(\ell(g) + 2\ell(y)) = 0$. En écrivant $x = g^s$ et $y = g^t$ (soit $\ell(x) = s\,\ell(g)$ et $\ell(y) = t\,\ell(g)$) et en développant, on trouve bien $r\,\ell(g)^2 = 0$ avec $r = (1+2s)(1+2t)$ impair. Ceci prouve $K_2(F) = 0$ et, en fait, $K_n(F) = 0$ pour tout $n \geq 2$. ✓

3 (complexe de Koszul). Soit A un anneau (commutatif), soit L un A-module et soit $f\colon L \to A$ une forme linéaire sur L. Expliquer pourquoi la formule suivante définit bien une application A-linéaire $\bigwedge^r L \to \bigwedge^{r-1} L$:

$$d_f^{(r)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} f(x_i)\ x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_r$$

(où $\hat{x}_i$ signifie qu'on a *omis* x_i dans l'expression). En particulier, $d_f^{(1)} = f$. Vérifier que l'application $d_f\colon \bigwedge^\bullet L \to \bigwedge^\bullet L$ ainsi définie (où $\bigwedge^\bullet L = \bigoplus_{r=0}^\infty \bigwedge^r L$ est l'algèbre extérieure de L, et où on convient que $d_f^{(0)}$ vaut 0) satisfait à la « règle de Leibniz graduée » $d_f(x \wedge y) = d_f^{(r)}(x) \wedge y + (-1)^r\, x \wedge d_f(y)$ si $x \in \bigwedge^r L$, et que $(d_f)^2 = 0$.

On se place à présent dans le cas particulier où $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, algèbre des polynômes à n indéterminées sur un corps k, où $L = A^n$ et où f est la forme linéaire qui envoie l'élément e_i de la base canonique de A^n sur l'indéterminée x_i. Montrer que la suite

$$0 \to \bigwedge^n (A^n) \xrightarrow{d_f^{(n)}} \cdots \xrightarrow{d_f^{(3)}} \bigwedge^2 (A^n) \xrightarrow{d_f^{(2)}} A^n \xrightarrow{f} A \to k \to 0$$

est exacte[3], où toutes les flèches sont d_f sauf la dernière $A \to k$ qui est l'application envoyant chaque x_i sur 0. Pour cela, on pourra procéder par récurrence sur n et remarquer que (pour un anneau A quelconque) $\bigwedge^r (A^{n+1}) = \bigwedge^r (A^n) \oplus \bigwedge^{r-1} (A^n)$ (en tant que A-modules) d'une manière qu'on pourra décrire explicitement (on distinguera l'exactitude au dernier cran, à l'avant-dernier, et à tous les autres).

Corrigé. Pour vérifier que d_f est bien défini en chaque degré r, il suffit de constater que $\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} f(x_i)\ x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_r$ définit une application r-linéaire alternée de L^r vers $\bigwedge^{r-1} L$, ce qui est facile (prendre $x_i = x_j$ pour $i \neq j$ et constater que tous les termes sont nuls sauf deux qui s'annulent). Pour vérifier la règle de Leibniz, il suffit de le faire pour les $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$: c'est alors clair sur l'expression de $d_f^{(r+s)}(x_1 \wedge \cdots \wedge y_s)$, si on isole dans la somme les r premiers termes (qui donnent $d_f^{(r)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$) et les s derniers (qui donnent $(-1)^r\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge d_f^{(s)}(y_1 \wedge \cdots \wedge y_s)$). Enfin, pour vérifier que $(d_f)^2 = 0$, il suffit, de nouveau, de le faire pour les $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$: on a $d_f^{(r-1)} d_f^{(r)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \sum_{i \neq j} (-1)^{i+j+\varepsilon(i,j)} f(x_i)\, f(x_j)\ x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_r$ où $\varepsilon(i,j)$ vaut 1 si $j < i$ et 0 si $j > i$, et le terme (i,j) compense donc le terme (j,i).

Passons maintenant à la preuve de l'exactitude pour $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Comme on sait déjà que $(d_f)^2 = 0$, i.e., que l'image de chaque $d_f^{(r+1)}$ est contenu dans le noyau de la suivante, $d_f^{(r)}$, ce qu'il s'agit de prouver est que le noyau est exactement égal à l'image. Remarquons aussi que l'exactitude au dernier cran est claire (le noyau de $k[x_1, \ldots, x_n] \to k$ est précisément l'idéal engendré par $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire l'image de $f\colon k[x_1, \ldots, x_n]^n \to k[x_1, \ldots, x_n]$ qui envoie e_i sur x_i). C'est l'exactitude aux crans précédents qui pose problème.

Comme suggéré, on procède par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Comme $k[x_1, \ldots, x_n, y]$ est un module libre sur $k[x_1, \ldots, x_n]$, rajouter une variable (qu'on notera y plutôt que x_{n+1} pour simplifier) à la suite exacte par hypothèse de récurrence préserve l'exactitude : on peut donc sans scrupule remplacer A par $k[x_1, \ldots, x_n, y]$. Commençons par prouver l'exactitude en un cran $\bigwedge^r (A^{n+1})$ avec $r \geq 2$: décomposons $\bigwedge^r (A^{n+1})$ comme $\bigwedge^r (A^n) \oplus \bigwedge^{r-1} (A^n)$ en mettant d'une part les éléments $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ de la base canonique de $\bigwedge^r (A^{n+1})$

([3]) On rappelle que cela signifie que l'image de chaque application est le noyau de la suivante.

(où $i_1 < \cdots < i_r$) pour lesquels $i_r \leq n$ (ce qui les identifie avec des éléments de $\bigwedge^r(A^n)$) et en envoyant les autres (ceux pour lesquels $i_r = n+1$) sur $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}} \in \bigwedge^{r-1}(A^n)$. Avec cette décomposition, la flèche $d_f^{(r)}\colon \bigwedge^r(A^{n+1}) \to \bigwedge^{r-1}(A^{n+1})$ devient l'application $\bigwedge^r(A^n) \oplus \bigwedge^{r-1}(A^n) \to \bigwedge^{r-1}(A^n) \oplus \bigwedge^{r-2}(A^n)$ donnée par $d_f^{(r)}(u,v) = (d_f^{(r)}(u) + (-1)^{r+1} y\, v,\ d_f^{(r-1)}(v))$ (où $u \in \bigwedge^r(A^n)$ et $v \in \bigwedge^{r-1}(A^n)$). À présent, supposons $d_f^{(r)}(u,v) = 0$ (i.e., (u,v) est dans le noyau de $d_f^{(r)}$), et cherchons à écrire $d_f^{(r)}$ comme l'image d'un élément par $d_f^{(r+1)}$ (au cran précédent). On a d'une part que $d_f^{(r-1)}(v) = 0$, ce qui donne $v = d_f^{(r)}(w)$ pour un certain $w \in \bigwedge^r(A^n)$ (par exactitude de d_f donnée par hypothèse de récurrence), d'autre part que $d_f^{(r)}(u + (-1)^{r+1} y\, w) = 0$, ce qui permet décrire $u + (-1)^{r+1} y\, w = d_f^{(r+1)}(t)$, donc $d_f^{(r+1)}(t,w) = (d_f^{(r+1)}(t) + (-1)^r y\, w,\ d_f(w)) = (u,v)$, et on a bien montré l'exactitude en $\bigwedge^r(A^{n+1})$ avec $r \geq 2$. Le seul qui reste est $r = 1$ (on a déjà fait remarquer que l'exactitude au dernier cran est claire). Supposons donc que $(u,v) \in A^n \oplus A$ s'envoie sur $f(u) + yv = 0 \in A$: alors $-yv = f(u) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ dans l'idéal engendré par $x_1, \ldots, x_n$ donc v y est aussi (s'il comportait un monôme ne faisant intervenir aucun de $x_1, \ldots, x_n$, ce monôme continuerait, après multiplication par y, de ne pas faire intervenir des variables). Donc v s'écrit $f(w)$ pour un certain $w \in A^n$, pour lequel on a alors $f(u + yw) = f(u) + yv = 0$, et la suite est identique au cas $r \geq 2$ (on écrit $u + yw = d_f^{(2)}(t)$ et alors $d_f^{(2)}(t,w) = (u,v)$). ✓