1 (algèbres de Clifford). Soit k un corps, qu'on supposera pour simplifier de caractéristique différente de 2 (c'est-à-dire que $2 \neq 0$ dans k), V un k-espace vectoriel de dimension finie et $q\colon V \to k$ une forme quadratique[1] sur V. On appelle *algèbre de Clifford* associée à q le quotient $C(q)$ de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ de V par son idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes x - q(x)\,1$ (où x parcourt V). Montrer que $C(q)$ a une dimension finie sur k qu'on calculera. Que vaut $C(q)$ si $q = 0$? Que vaut $C(q)$ si q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ donnée par $q(x) = -x^2$ (respectivement $q(x) = +x^2$) ?

Montrer que pour tout r il existe un espace vectoriel de dimension r de matrices réelles (de taille non précisée) dans lequel seule la matrice nulle n'est pas inversible. (Qu'en est-il sur $\mathbb{C}$?)

2 (K-théorie de Milnor des corps finis). Soit F un corps. On appellera $K_1(F)$ le groupe multiplicatif $F^\times$ considéré comme un $\mathbb{Z}$-module (et noté additivement) : on notera $\ell\colon F^\times \to K_1(F)$ l'isomorphisme en question (ainsi, $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$ par définition). Notons maintenant $K_\bullet(F)$ le quotient de l'algèbre tensorielle de $K_1(F)$ (sur $\mathbb{Z}$) par l'idéal bilatère engendré par les $\ell(a) \otimes \ell(1-a)$ pour $a \in F \setminus \{0,1\}$. L'algèbre $K_\bullet(F)$ s'appelle la *K-théorie de Milnor* de F ; comme la graduation de l'algèbre tensorielle passe au quotient, on peut bien sûr définir $K_n(F)$ comme la partie homogène de degré n (autrement dit, engendrée par les $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n)$ pour $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$).

Montrer que :

(i) $\ell(a)\,\ell(-a) = 0$ pour tout $a \in F^\times$ (on pourra faire intervenir $\ell(1-\frac{1}{a})$).

(ii) $\ell(a)\,\ell(b) = -\ell(b)\,\ell(a)$ pour tous $a, b \in F^\times$ (on pourra développer $\ell(ab)\,\ell(-ab)$), et par conséquent $yx = (-1)^{mn}xy$ si $x \in K_m(F)$ et $y \in K_n(F)$.

(iii) $\ell(a)^2 = \ell(-1)\,\ell(a) = \ell(a)\,\ell(-1)$ pour tout $a \in F^\times$.

(iv) $\ell(a)\,\ell(b) = \ell(a+b)\,\ell(-\frac{b}{a})$ lorsque $a, b \in F^\times$ sont tels que $a + b \neq 0$ (on observera que $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$).

(v) $\ell(a_1)\cdots\ell(a_n) = 0$ lorsque $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$ sont tels que $a_1 + \cdots + a_n \in \{0,1\}$ (on pourra procéder par récurrence sur n et faire intervenir $a_1 + a_2$).

Si F est un corps fini, montrer que $K_2(F)$ est engendré par $\ell(g)^2$ où g est un générateur de $F^\times$, et que $2\ell(g)^2 = 0$. Puis montrer qu'en fait $\ell(g)^2 = 0$ (lorsque F est de caractéristique $\neq 2$, on utilisera des éléments x et y tels que $g(x^2 + y^2) = 1$). On en déduit $K_n(F) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

3 (complexe de Koszul). Soit A un anneau (commutatif), soit L un A-module et soit $f\colon L \to A$ une forme linéaire sur L. Expliquer pourquoi la formule suivante définit bien une application A-linéaire $\bigwedge^r L \to \bigwedge^{r-1} L$:

$$d_f^{(r)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} f(x_i)\; x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_r$$

(où $\hat{x}_i$ signifie qu'on a *omis* x_i dans l'expression). En particulier, $d_f^{(1)} = f$. Vérifier que l'application $d_f\colon \bigwedge^\bullet L \to \bigwedge^\bullet L$ ainsi définie (où $\bigwedge^\bullet L = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigwedge^r L$ est l'algèbre extérieure de L, et où on convient que $d_f^{(0)}$ vaut 0) satisfait à la « règle de Leibniz graduée » $d_f(x \wedge y) = d_f^{(r)}(x) \wedge y + (-1)^r x \wedge d_f(y)$ si $x \in \bigwedge^r L$, et que $(d_f)^2 = 0$.

On se place à présent dans le cas particulier où $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, algèbre des polynômes à n indéterminées sur un corps k, où $L = A^n$ et où f est la forme linéaire qui envoie l'élément

(1) Autrement dit, on suppose que $q(cx) = c^2 x$ pour tout $c \in k$ et $x \in V$ et que $q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire en x et y (cette définition convient même en caractéristique 2).

e_i de la base canonique de A^n sur l'indéterminée x_i. Montrer que la suite

$$0 \to \bigwedge^n(A^n) \xrightarrow{d_f^{(n)}} \cdots \xrightarrow{d_f^{(3)}} \bigwedge^2(A^n) \xrightarrow{d_f^{(2)}} A^n \xrightarrow{f} A \to k \to 0$$

est exacte[2], où toutes les flèches sont d_f sauf la dernière $A \to k$ qui est l'application envoyant chaque x_i sur 0. Pour cela, on pourra procéder par récurrence sur n et remarquer que (pour un anneau A quelconque) $\bigwedge^r(A^{n+1}) = \bigwedge^r(A^n) \oplus \bigwedge^{r-1}(A^n)$ (en tant que A-modules) d'une manière qu'on pourra décrire explicitement (on distinguera l'exactitude au dernier cran, à l'avant-dernier, et à tous les autres).

([2]) On rappelle que cela signifie que l'image de chaque application est le noyau de la suivante.