Calculs de produits tensoriels

1. Soient U et V deux espaces vectoriels (sur un corps k). On note $U^\vee = \mathrm{Hom}_k(U,k)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi\colon U^\vee \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U,V)$. Quelles sont les images des tenseurs purs (c'est-à-dire les $\lambda\otimes v$ avec $\lambda \in U^\vee$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

Corrigé. Pour définir une application linéaire $U^\vee \otimes_k V \to \mathrm{Hom}_k(U,V)$ il suffit de définir une application bilinéaire $U^\vee \times V \to \mathrm{Hom}_k(U,V)$: on le fait en envoyant une forme linéaire λ sur U et un vecteur v de V sur l'application linéaire $U \to V$ donnée par $x \mapsto \lambda(x)\, v$.

L'image d'un tenseur pur $\lambda \otimes v$ est donc l'application linéaire $x \mapsto \lambda(x)\, v$, qui est de rang[1] 1 (ou 0). Réciproquement, toute application linéaire de rang 1 a une image contenue dans $\langle v\rangle = kv$ pour un certain v et donc s'écrit de la forme $x \mapsto \lambda(x)\, v$. On a ainsi prouvé que l'image des tenseurs purs dans $\mathrm{Hom}_k(U,V)$ par Φ était l'ensemble des applications linéaires de rang 1. On en déduit que l'image de Φ est l'ensemble des applications linéaires de rang fini (toute application de rang fini est somme d'applications de rang 1 comme on le voit facilement en prenant une base de l'image).

Montrons enfin que Φ est injective : soit $\sum_i \lambda_i \otimes v_i \in U^\vee \otimes_k V$ (somme finie). dont l'image par Φ, soit $x \mapsto \sum_i \lambda_i(x)\, v_i$, est nulle. Quitte à remplacer les v_i par des combinaisons linéaires d'une base de l'espace $\langle v_i\rangle$ qu'ils engendrent, on peut supposer qu'ils sont linéairement indépendants ; alors puisque $x \mapsto \sum_i \lambda_i(x)\, v_i$ est nulle, chacun des λ_i doit l'être, et c'est donc bien que $\sum_i \lambda_i \otimes v_i$ est nulle.

Manifestement, Φ est un isomorphisme si et seulement si toute application k-linéaire $U^\vee \to V$ est de rang fini, c'est-à-dire si et seulement si U ou V est de dimension finie. ✓

2. On rappelle qu'un $\mathbb{Z}$-module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien. (a) Expliquer pourquoi, si M est un groupe abélien et n un entier naturel non nul, le produit tensoriel $M\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ s'identifie naturellement à M/nM. (b) Calculer les produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$ de deux quelconques des groupes abéliens parmi : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n un naturel non nul variable), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (c) En notant $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe abélien des suites d'entiers dont presque tous les termes (c'est-à-dire : tous sauf un nombre fini) sont nuls, et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le groupe abélien de toutes les suites d'entiers, expliciter $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et les comparer à $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. (d) (†) À quelle condition nécessaire et suffisante sur le groupe abélien M le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est-il nul ? (On pourra notamment observer que tout élément de ce produit tensoriel s'écrit sous la forme $x \otimes \frac{1}{q}$.)

Corrigé. (a) On définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to M/nM$ en envoyant $x \otimes \bar{k}$ (où $x \in M$ et $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) sur la classe de kx dans M/nM : cette application a bien un sens car elle provient d'une application bilinéaire $M \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to M/nM$. On veut montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. La surjectivité est claire car $x \otimes \bar{1}$ s'envoie sur $\bar{x} \in M/nM$ pour tout $x \in M$. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ étant engendré par $\bar{1}$, le groupe $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est engendré par les $x \otimes \bar{1}$, donc tous ses éléments *sont* des $x \otimes \bar{1}$. Or si $x \otimes \bar{1}$ s'envoie sur $\bar{x} = 0 \in M/nM$, c'est que x est un multiple de n, disons $x = ny$, et alors $x \otimes \bar{1} = ny \otimes \bar{1} = y \otimes \bar{n} = 0$: ceci prouve l'injectivité. On a donc bien $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong M/nM$ par la flèche décrite.

(b) Pour tout groupe abélien M on a $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = M$. Pour tensoriser avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on vient de voir que $M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = M/nM$: donc $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m\wedge n)\mathbb{Z}$ (ici, $m\wedge n$ désigne le pgcd de m et n) et $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ (tout élément de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est multiple de n).

Ensuite, $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. En effet, on a une application bilinéaire (la multiplication !) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ qui définit une flèche $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ par $r \otimes r' \mapsto rr'$. Cette application est évidemment

[1] Au sens « dimension de l'image ».

surjective. Pour voir l'injectivité, on remarque que (pour $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) on a $\frac{p}{q} \otimes \frac{p'}{q'} = (q'\frac{p}{qq'}) \otimes (p'\frac{1}{q'}) = (p'\frac{p}{qq'}) \otimes (q'\frac{1}{q'}) = \frac{pp'}{qq'} \otimes 1$ donc tout élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est de la forme $r \otimes 1$ avec $r \in \mathbb{Q}$, et $r \otimes 1$ n'a une image nulle que pour $r = 0$.

Anticipons sur la question (d) en remarquant que si dans un groupe abélien M tout élément est d'ordre fini alors $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. En effet, si $x \in M$ est d'ordre fini n, on a $x \otimes \frac{p}{q} = (nx) \otimes \frac{p}{nq} = 0 \otimes \frac{p}{nq} = 0$ dans ce produit tensoriel. En particulier, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ car tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini (et on a déjà remarqué que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$). Enfin, la surjection canonique $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définit une application $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, qui est nécessairement surjective (car dans tout tenseur $x \otimes y$ on peut relever l'élément y), donc $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est également nul.

Pour résumer la situation, on a le tableau suivant :

$\otimes_{\mathbb{Z}}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/(m \wedge n)\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	0	0

(c) On a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$, le $\mathbb{Z}$-module libre de base dénombrable, donc (le produit tensoriel distribue sur la somme directe) $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, lui, n'est pas libre[2], et le produit tensoriel ne distribue pas sur le produit direct infini. Néanmoins, on peut décrire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme ceci : c'est le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ formé des suites de rationnels dont le dénominateur reste borné ; en effet, si on note E l'espace ainsi décrit, on a une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to E$ envoyant $(u_n) \otimes r$ sur (ru_n), et on peut lui définir une réciproque en envoyant une suite (u_n) de rationnels de dénominateur borné sur $(Nu_n) \otimes \frac{1}{N}$ où N est tel que tous les Nu_n soient entiers.

(d) On a vu ci-dessus que si tout élément de M est d'ordre fini (M est alors dit « de torsion ») alors $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. Montrer la réciproque est plus délicat. Soit z un élément de M d'ordre infini (i.e., $Nz = 0$ implique $N = 0$) et on veut prouver que $z \otimes 1$ est non nul dans $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Imaginons une relation qui donnerait l'annulation de $z \otimes 1$: si on construit le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme le groupe abélien libre engendré par les couples (x, r) (où $x \in M$ et $r \in \mathbb{Q}$) quotienté par les relations qui assurent la bilinéarité, la relation de $z \otimes 1$ à zéro signifie que $(z, 1)$ est dans le sous-groupe engendré par un certain ensemble $\mathcal{R}$ (fini) de relations de la forme $(x, r) + (y, r) - (x + y, r)$, $(nx, r) - n(x, r)$ et ainsi de suite. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble (fini, encore) de tous les (x, r) qui interviennent dans une de ces relations, et prenons $N \neq 0$ un dénominateur commun de tous les r pour lesquels il existe un $(x, r) \in \mathcal{C}$. Alors, en envoyant le couple $(x, r) \in \mathcal{C}$ sur l'élément $(Nr)x \in M$, on définit un morphisme $\mathbb{Z}^{\mathcal{C}} \to M$ dont le noyau contient l'ensemble $\mathcal{R}$ de relations (vérification évidente dans chaque cas) et, par conséquent, toute relation engendrée. Ainsi, puisque $(z, 1)$ était réputé être dans le sous-groupe engendré par $\mathcal{R}$, il est aussi dans le noyau, c'est-à-dire que $Nz = 0$. Mais ceci contredit l'hypothèse.

(On peut trouver que cette démonstration et du bricolage, et en préférer une autre. Par exemple, il est possible de décrire explicitement $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on peut quotienter par les éléments d'ordre fini : si M_{tors} désigne l'ensemble des éléments de M d'ordre fini, on voit facilement que M_{tors} est un sous-groupe de M, et que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (M/M_{\text{tors}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ par la flèche évidente, donc on est ramené au cas où M est sans torsion. Dans ce cas, $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ se construit explicitement comme l'ensemble des $\frac{x}{q}$ avec $x \in M$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ quotienté par la relation qui identifie $\frac{x}{q}$ avec $\frac{x'}{q'}$ lorsque $q'x = qx'$. Sur cette description, il est assez clair que ce n'est pas nul. Les gens savants, eux, disent que $\mathbb{Q}$ est limite inductive

([2]) Ce n'est pas évident ; en tout cas, ce qui suit ne le prouve pas.

filtrante de $\mathbb{Z}$ pour les flèches de multiplication par les entiers non nuls, et que par conséquent — le produit tensoriel commutant aux limites inductives filtrantes — $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est aussi limite inductive filtrante de M pour les mêmes flèches de multiplication, et comme elles sont toutes injectives si M est sans torsion, M s'injecte naturellement dans le produit tensoriel.) ✓

3. Si A et B sont deux algèbres[3] (commutatives ou non) sur un anneau (commutatif) k, expliquer pourquoi le produit tensoriel $A \otimes_k B$ est encore une k-algèbre pour la multiplication $(x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') = (xx') \otimes (yy')$.

Soit k un corps. Quel est le produit tensoriel $k[x] \otimes_k k[y]$ de deux copies de l'algèbre des polynômes à une indéterminée sur k, notamment par rapport à $k[x, y]$? Que peut-on dire de $k(x) \otimes_k k(y)$ par rapport à $k(x, y)$ (on cherchera à le décrire aussi précisément que possible) ?

Corrigé. Le point important est de vérifier que la multiplication est bien définie : et pour définir une application bilinéaire $(A \otimes_k B)^2 \to A \otimes_k B$, on constate que l'application $A \times B \times A \times B \to A \otimes_k B$ envoyant (x, y, x', y') sur $(xx') \otimes (yy')$ est manifestement quadrilinéaire. On vérifie ensuite facilement l'associativité et le fait que $1 \otimes 1$ est élément neutre.

On envoie $k[x] \otimes_k k[y]$ vers $k[x, y]$ par l'application qui à $f \otimes g$ (où f est un polynôme en l'indéterminée x et g un polynôme en l'indéterminée y) associe $f(x)\, g(y)$ vu comme polynôme en les deux indéterminées x et y. Plus pragmatiquement, les monômes forment des bases des algèbres de polynômes, et on envoie $x^m \otimes y^n$ sur $x^m y^n$. Cette dernière description assure que l'application est un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Pour voir qu'il s'agit d'un isomorphisme de k-algèbres il reste encore à se convaincre de la compatibilité à la multiplication, mais ceci est immédiat pour la définition qu'on a choisie.

Dans le cas des corps de fractions rationnelles, on a bien une application $k(x) \otimes_k k(y) \to k(x, y)$, toujours définie par $f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x)\, g(y)$. Il s'agit toujours d'un morphisme d'algèbres. Son image est l'ensemble R des fractions rationnelles h qui s'écrivent comme somme de $f(x)\, g(y)$ pour des fractions rationnelles en une indéterminée f et g, et on voit facilement que cela équivaut au fait que h admet un dénominateur qui est produit d'un polynôme en x et d'un polynôme en g (en effet, de telles fractions sont certainement dans l'image, et comme R forme une k-algèbre et contient les $f(x)\, g(y)$, c'est exactement l'image indiquée). Pour montrer l'injectivité, on peut soit appliquer le même raisonnement que pour l'exercice 2 (d), soit construire une application $R \to k(x) \otimes_k k(y)$ en envoyant $\frac{\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j}{p(x)\, q(y)}$ sur $\sum_{i,j} a_{i,j} (\frac{x^i}{p(x)} \otimes \frac{y^j}{q(y)})$ et en constatant que la composée dans les deux sens est l'identité. ✓

4. Soit k un corps, et $A = k[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées x et y sur k (on rappelle qu'il est factoriel). Soit $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal de A engendré par x et y — qu'on verra notamment comme un A-module. Pour éviter les confusions, on notera $\mathfrak{m}^{\oplus 2} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}$ la somme directe (= le produit direct) de deux copies de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = (x^2, xy, y^2)$ l'idéal produit de $\mathfrak{m}$ avec lui-même. Le but de l'exercice est de déterminer le produit tensoriel $\mathfrak{m}^{\otimes 2} = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}$ avec lui-même au-dessus de A.

(1) On considère $\varphi \colon A^{\oplus 2} \to \mathfrak{m}$ défini par $\varphi(f, g) = fx + gy$. Expliquer pourquoi φ est surjective et montrer que son noyau est l'image d'une application A-linéaire $\psi \colon A \to A^{\oplus 2}$ injective à préciser.

(3) On rappelle que si k est un anneau commutatif, une k-algèbre est un anneau A muni d'un morphisme $\iota \colon k \to A$, non nécessairement injectif, dont l'image est dans le centre de A (cette précision étant évidemment inutile si A est commutatif). Ceci détermine une structure de k-module sur A par $c \bullet a = \iota(c)\, a$, et réciproquement tout k-module muni d'une multiplication k-bilinéaire qui fait de A un anneau est une k-algèbre en ce sens pour le morphisme $\iota \colon c \mapsto c \bullet 1_A$.

(2) En déduire que $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ peut se décrire comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module isomorphe à $\mathfrak{m}$ que l'on précisera. On appellera $\varphi_{\mathfrak{m}}$ la surjection $\mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ ainsi définie.

(3) Soit $\mu\colon \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ défini par $\mu(m \otimes m') = mm'$: quelle est l'image de μ ? Quelle est la composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$?

(4) Soit $\Delta = x \otimes y - y \otimes x \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$. Montrer que $\mu(\Delta) = 0$ et $\Delta \neq 0$.

(5) Montrer que tout élément du noyau $\ker \mu$ de μ s'écrit de la forme $t\Delta$ pour un $t \in k$: on pourra montrer pour $d \in \ker \mu$ que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$.

(6) Définir une application A-linéaire (non canonique) $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ telle que la composée $\mu\lambda$ soit l'identité.

(7) Conclure quant à la structure de $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ en tant que A-module.

Corrigé. (1) La surjectivité de φ n'est autre que l'affirmation que $\mathfrak{m}$ est engendré par x et y, ce qui en est la définition. Le noyau de φ est l'ensemble des couples (f, g) d'éléments de A tels que $fx = -gy$: pour un tel couple, f doit être divisible par y donc on peut écrire $f = hy$ et alors $g = -hx$, c'est-à-dire que (f, g) est l'image de h par $\psi\colon A \to A^{\oplus 2}, h \mapsto (hy, -hx)$. L'injectivité de ψ est évidente (A est intègre).

(2) Puisque φ est surjective, on en déduit (exactitude à droite du produit tensoriel) que $\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ l'est aussi et que son noyau est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}} = \psi \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. On peut décrire ces flèches un peu mieux : $\psi_{\mathfrak{m}}$ envoie $m \in \mathfrak{m}$ sur $(my, -mx) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ et $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie $(fm, gm) = (f, g) \otimes m \in \mathfrak{m}^{\oplus 2} = A^{\oplus 2} \otimes_A \mathfrak{m}$ (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $(fx + gy) \otimes m \in \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, c'est-à-dire (quitte à faire passer f et g de l'autre côté du signe $\otimes$) que $\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (m, m') sur $x \otimes m + y \otimes m'$. L'injectivité de $\psi_{\mathfrak{m}}$ est évidente : il s'agit de la restriction de ψ à $\mathfrak{m}$ au départ et $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ à l'arrivée. On a donc bien décrit $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ (l'image de $\varphi_{\mathfrak{m}}$) comme le quotient de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ par un sous-module (le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, qui est l'image de $\psi_{\mathfrak{m}}$) isomorphe à $\mathfrak{m}$ (comme $\psi_{\mathfrak{m}}$ est injective).

(3) L'image de μ est le sous-A-module de $\mathfrak{m}$, donc de A, engendré par les produits de deux éléments quelconques de $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}^{\cdot 2} = (x^2, xy, y^2)$. La composée $\mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ envoie (fm, gm) (où $m \in \mathfrak{m}$ et $(f, g) \in A^{\oplus 2}$) sur $fmx + gmy$, autrement dit, $\mu\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ où $\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}$ désigne l'injection canonique de $\mathfrak{m}^{\oplus 2}$ dans $A^{\oplus 2}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker\mu \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m} \arrow[r, "\psi_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{m}}"] & \mathfrak{m}^{\oplus 2} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}}"] & \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A^{\oplus 2} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[r, "0"] \arrow[d] & k^{\oplus 2} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & k^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

(4) On a $\mu(\Delta) = \mu(x \otimes y - y \otimes x) = xy - yx = 0$. Montrons maintenant que $\Delta \neq 0$: on a $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, 0) - \varphi_{\mathfrak{m}}(0, x) = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, -x)$, et pour montrer que $\Delta \neq 0$ il suffit de prouver que $(y, -x) \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$ n'est pas dans le noyau de $\varphi_{\mathfrak{m}}$, lequel est également l'image de

$\psi_{\mathfrak{m}}$; or $(y, -x) = \psi(1)$ et comme $1 \in A$ n'est pas dans $\mathfrak{m}$, que ψ est injective et que $\psi_{\mathfrak{m}}$ est sa restriction à $\mathfrak{m}$, on bien $\Delta \neq 0$. (Une autre façon de raisonner consiste à observer que l'application A-bilinéaire $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to k$ qui envoie $(ax + by + \cdots, a'x + b'y + \cdots)$ sur ba' définit une application A-linéaire $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m} \to k$ qui prend une valeur non nulle sur Δ.)

(5) Prenons $d \in \ker \mu$: puisque $\varphi_{\mathfrak{m}}$ est surjective, on peut écrire $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(m, m')$ avec $(m, m') \in \mathfrak{m}^{\oplus 2}$. Alors $\varphi(m, m') = 0$ car $\varphi\iota_{\mathfrak{m}^{\oplus 2}} = \mu\varphi_{\mathfrak{m}}$ donc il s'écrit aussi $\mu(d) = 0$. Mais ceci signifie (comme le noyau de φ est l'image de ψ) que $(m, m') = \psi(h)$ pour un (unique) $h \in A$. Soit $t = h(0, 0)$ la classe de h dans $A/\mathfrak{m} = k$. Alors $h - t$ est dans $\mathfrak{m}$ donc $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h - t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi_{\mathfrak{m}}(h - t)) = 0$ de sorte que $d = \varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(h))$ s'écrit aussi $\varphi_{\mathfrak{m}}(\psi(t)) = \varphi_{\mathfrak{m}}(ty, -tx)$. On a vu plus haut que $\Delta = \varphi_{\mathfrak{m}}(y, -x)$ et donc $d = t\Delta$.

(6) On définit $\lambda\colon \mathfrak{m}^{\cdot 2} \to \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ par $\lambda(x^2) = x \otimes x$, $\lambda(xy) = x \otimes y$ et $\lambda(y^2) = y \otimes y$. Comme les générateurs x^2, xy, y^2 de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ ne sont pas libres (ils satisfont des relations), il faut vérifier que ceci a bien un sens : or les relations sont engendrées[4] par $y(x^2) = x(xy)$ et $y(xy) = x(y^2)$, et on a bien $y(x \otimes x) = x \otimes (xy) = x(x \otimes y)$ d'une part et d'autre part $y(x \otimes y) = x \otimes (y^2) = (xy) \otimes y = x(y \otimes y)$ dans $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$, donc λ est bien définie. Il est ensuite clair que $\mu\lambda = \mathrm{id}_{\mathfrak{m}^{\cdot 2}}$.

(7) On a enfin $\ker \mu \oplus \operatorname{im} \lambda = \mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ avec λ injective donc un isomorphisme de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ sur son image et $\ker \mu = k\Delta$ isomorphe à k. Bref, $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ est isomorphe à la somme directe de $\mathfrak{m}^{\cdot 2}$ et de k. ✓

Divers

5. Soient U et V deux espaces vectoriels de dimensions finies m et n respectivement sur un corps k. Soient $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$ des endomorphismes (k-linéaires). Montrer que les coefficients du polynôme caractéristique $\chi_{f\otimes g}$ de $f \otimes g\colon U \otimes_k V \to U \otimes_k V$ sont fonction polynomiale de ceux des polynômes caractéristiques χ_f et χ_g de f et g.

Corrigé. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Le polynôme caractéristique $\chi_u = \det(X - u)$ d'un endomorphisme u ne dépend pas du corps sur lequel on le calcule. Sur $\bar{k}$, on peut écrire (de façon unique) $f = f_{\mathrm{s}} + f_{\mathrm{n}}$ sur k, où f_{s} est diagonalisable et f_{n} est nilpotent, avec $f_{\mathrm{s}}f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n}}f_{\mathrm{s}}$. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le même que celui de f_{s}, c'est-à-dire $\prod_i (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de f_{s} comptées avec multiplicité. On décompose de même g en g_{s} et g_{n}. On a alors $f \otimes g = (f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}) + (f_{\mathrm{n}} \otimes g_{\mathrm{s}} + f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{n}} + f_{\mathrm{n}} \otimes g_{\mathrm{n}})$, et le second terme est somme de nilpotents qui commutent deux à deux, donc nilpotent, le premier est diagonalisable, et ils commutent. On a donc $(f \otimes g)_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}$ et le polynôme caractéristique de $f \otimes g$ est celui de $f_{\mathrm{s}} \otimes g_{\mathrm{s}}$: on est ainsi ramené au cas où f et g (et donc $f \otimes g$) sont diagonalisables, ce qu'on suppose dorénavant.

En diagonalisant f sur $\bar{k}$ (ce qui revient à écrire U comme somme directe de sous-espaces stables de dimension 1 de f) et g de même on voit que $f \otimes g$ (en distribuant le produit tensoriel $U \otimes_k V$ sur ces décompositions de U et V, ou, ce qui revient au même, en prenant la base produit de deux bases de diagonalisation) se diagonalise avec pour valeurs propres les produits $\lambda_i\mu_j$ des valeurs propres λ_i de f et des valeurs propres μ_j de g, chacune apparaissant avec la multiplicité produit.

Reste enfin à montrer que $\chi_{f\otimes g} = \prod_{i,j}(X - \lambda_i\mu_j)$ s'exprime de façon polynômiale — sur k ou sur n'importe quel corps, et même sur $\mathbb{Z}$ — dans les coefficients de $\chi_f = \prod_i (X - \lambda_i)$ et de $\chi_g = \prod_j (X - \mu_j)$. On peut le faire en considérant les λ_i comme m indéterminées et les μ_j comme n autres (et en travaillant sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps fini quelconque, donc, si on veut, sur

([4]) Pour s'en convaincre, on suppose qu'on a $f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2 = 0$, on remarque que f_0 est forcément divisible par y et f_2 par x et alors que f_1 appartient à $\mathfrak{m}$, bref, $f_0 = yh_0$, $f_1 = yh_2 - xh_0$ et $f_2 = -xh_2$ et les deux relations annoncées sont bien génératrices.

un corps quelconque ou même sur $\mathbb{Z}$). D'abord, pour λ une indéterminée, les coefficients de $\prod_j(X - \lambda\mu_j)$ s'exprime comme polynôme en λ et les coefficients de $\chi_g = \prod_j(X - \mu_j)$ (plus précisément, si $g = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ alors $\prod_j(X - \lambda\mu_j) = X^n + \lambda a_1 X^{n-1} + \cdots + \lambda^n a_n$. Ainsi, $\chi_{f\otimes g} = \prod_{i,j}(X - \lambda_i\mu_j)$ s'exprime comme polynôme en les λ_i et les coefficients de χ_g, mais, qui plus est, chacun des coefficients de ce polynôme est invariant par n'importe quelle permutation des λ_i : il s'exprime donc comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires des λ_i, qui sont les coefficients de χ_f. On a bien montré que les coefficients de $\chi_{f\otimes g}$ sont des polynômes de ceux de χ_f et χ_g. ✓

6. (†) Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs). Tout B-module M peut être considéré comme un A-module par la multiplication $a \bullet x = \varphi(a) \cdot x$ pour $a \in A$ et $x \in M$. Montrer l'équivalence entre (i) toute application A-linéaire $M \to N$ de B-modules est automatiquement B-linéaire, (ii) une quelconque des deux flèches $B \to B \otimes_A B$ (données par $b \mapsto 1 \otimes b$ et $b \mapsto b \otimes 1$) est un isomorphisme (auquel cas les deux coïncident) et (iii) pour n'importe quel B-module M, la flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ est un isomorphisme et les structures de B-module de $B \otimes_A M$ sont les mêmes pour la multiplication sur le facteur de gauche ou de droite.

Corrigé. Montrons que (i) implique (ii). On considère $B \otimes_A B$ comme un B-module par multiplication sur le facteur de gauche. La flèche $b \mapsto 1 \otimes b$ est A-linéaire par définition du produit tensoriel sur A ($a \otimes b = 1 \otimes ab$) : l'hypothèse (i) assure donc qu'elle est B-linéaire, c'est-à-dire en particulier (comme on a choisi de mettre sur $B \otimes_A B$ la structure correspondant à la multiplication sur le facteur de gauche) que $b \otimes b' = 1 \otimes bb'$ pour tous $b, b' \in B$. On peut donc dire que les flèches $B \to B \otimes_A B, b \mapsto 1 \otimes b$ et $B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$ sont des bijections réciproques et (ii) est prouvé.

Montrons à présent que (ii) implique (iii). La flèche $M \to B \otimes_A M$ donnée par $x \mapsto 1 \otimes x$ se factorise en $M \to B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M \to B \otimes_A M$ où la première flèche est l'isomorphisme naturel $x \mapsto 1 \otimes x$, la deuxième est $b \otimes x \mapsto (1 \otimes b) \otimes x$, et la troisième est $(b \otimes b') \otimes x \mapsto b \otimes b'x$: cette fois, $B \otimes_A B$ a été considéré comme B-module par multiplication sur le facteur de droite. Mais l'hypothèse (ii) assure que $B \to B \otimes_A B$ et donc aussi $B \otimes_B M \to (B \otimes_A B) \otimes_B M$, est un isomorphisme. Donc $M \to B \otimes_A M$, en tant que composée d'isomorphismes, en est un, et comme les deux flèches $B \to B \otimes_A B$ coïncident les deux structures de B-module sur $B \otimes_A M$ coïncident aussi, ce qui démontre (iii).

Montrons enfin que (iii) implique (i) : d'une flèche A-linéaire $M \to N$ entre deux A-modules on déduit une flèche B-linéaire $1 \otimes f\colon B \otimes_A M \to B \otimes_A N$, qui d'après (iii) coïncide avec f elle-même modulo des isomorphismes naturels. Donc f est bien B-linéaire. ✓