1. (a) Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne de groupe de Galois G , et $u: G \rightarrow L^\times$ une application à valeurs dans le groupe multiplicatif telle que : $u(gh) = u(g)g(u(h))$ ($\forall g, h \in G$). Montrer qu'il existe un élément non nul $v \in L^\times$ tel que : $u(h) = v h(v)^{-1}$ ($\forall h \in G$). (On pourra chercher v sous la forme $v = \sum_{g \in G} u(g)g(w)$ pour un $w \in L$ bien choisi.)

(b) On suppose de plus que G est cyclique d'ordre n , engendré par h . Soit $x \in L$ tel que $x h(x) h^2(x) \cdots h^{n-1}(x) = 1$. Montrer qu'il existe $y \in L$ tel que $x = y h(y)^{-1}$.

(c) On revient à la situation du (a) (G n'est pas nécessairement cyclique). Soit $\phi: G \rightarrow L$ une application telle que $\phi(gh) = \phi(g) + g(\phi(h))$ ($\forall g, h \in G$). Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $\phi(g) = c - g(c)$ ($\forall g \in G$). (On pourra montrer qu'il existe w tel que $\sum_{g \in G} g(w) = 1$.)

(d) On suppose à nouveau G cyclique d'ordre n , de générateur h . Soit $x \in L$ tel que $x + h(x) + \cdots + h^{n-1}(x) = 0$. Montrer qu'il existe $z \in L$ tel que $x = z - h(z)$.

(e) On suppose que le corps K est de caractéristique $p \neq 0$ et que $K \subseteq L$ est une extension cyclique de degré p . Montrer qu'il existe $c \in L$ tel que $L = K(c)$ et $c^p - c \in K$.

2. Déterminer le groupe de Galois du polynôme $X^4 + 2X^2 + X + 3$. (On pourra réduire modulo 2, 3 et 5.)

3. On considère le sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices de permutation et les matrices de changement de signe sur un nombre pair de coordonnées. On le fait agir naturellement sur les fonctions polynomiales. Montrer que la sous-algèbre des fonctions polynomiales invariantes par G est une algèbre de polynômes et déterminer explicitement un système basique d'invariants.

4. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson et M un A -module de type fini. Montrer que si $m_1, \dots, m_n \in M$ sont tels que leurs images dans M/IM engendrent M/IM , alors ils engendrent M .

L'hypothèse que M est de type fini est-elle nécessaire ?

5. Soit k un corps, $V \subseteq k^n$ et $W \subseteq k^m$ des variétés non vides. On désigne par $A(V)$ et $A(W)$ les algèbres de fonctions polynomiales sur V et W , et par $I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ et $I(W) \subseteq k[Y_1, \dots, Y_m]$ les idéaux annulateurs.

(a) Montrer que $V \times W \subseteq k^{n+m}$ est une variété, et que l'application naturelle donnée par le produit des fonctions détermine un morphisme d'algèbres $A(V) \otimes_k A(W) \rightarrow A(V \times W)$.

(b) On suppose que V et W sont irréductibles. Montrer que $V \times W$ est irréductible.

(c) Montrer que l'idéal $(I(V), I(W))$ de $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$, engendré par $I(V)$ et $I(W)$ est l'idéal annulateur de $V \times W$ et que $A(V) \otimes_k A(W) \rightarrow A(V \times W)$ est un isomorphisme.