Échantillons de rédaction

David A. Madore

14 novembre 2000

Exercices 2 à 6 et 11, pages 45–46 du polycopié orange.

Exercice 2

(a) Montrons que l'équation $x^7 - x^2 + 1 = 0$ a une solution sur $\mathcal{I} = [-2; 0]$. Pour cela, définissons une fonction $f\colon [-2; 0] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^7 - x^2 + 1$. Cette fonction est continue (c'est une fonction polynômiale) ; elle vérifie $f(-2) = -128 - 4 + 1 = -131 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, de sorte que le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un $c \in]-2; 0[$ tel que $f(c) = 0$. Ceci signifie que $c^7 - c^2 + 1 = 0$, autrement dit, c est une solution de l'équation considérée.

(b) Montrons que l'équation $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$ a une solution sur $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Pour cela, définissons une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x - 2$. Cette fonction est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ (on rappelle que la fonction racine cubique est définie et continue sur $\mathbb{R}$), et y est continue (comme composée de fonctions continues). On a $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$. Par ailleurs, $f(x) = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 3 - \frac{2}{x}\right)$; or lorsque $x \to -\infty$, on a $\frac{6}{x^2} \to 0$ et $\frac{1}{x^3} \to 0$, de sorte que $1 + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \to 1$, et $\sqrt[3]{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \to 1$ (par continuité de la racine cubique) ; comme de plus, toujours lorsque $x \to -\infty$, on a $\frac{2}{x} \to 0$, on voit que finalement $\sqrt[3]{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 3 - \frac{2}{x} \to -2$, et par conséquent $f(x) \to +\infty$. On a donc montré que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisamment grand en valeur absolu et négatif, on a $f(x) > 0$. Mais puisqu'on a remarqué que $f(0) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires (f étant continue), on peut en conclure qu'il existe c (et même $c < 0$) tel que $f(c) = 0$.

(c) Montrons que l'équation $\tan x = \frac{3}{2}x$ a une solution sur $\mathcal{I} =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$. Pour cela, définissons une fonction $f\colon [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \tan x - \frac{3}{2}x$. Cette fonction est bien définie, et elle est continue ; elle vérifie $f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{3\pi}{8} < 0$ car $\pi > 3$ donc $3\pi > 9 > 8$; et d'autre part, $f(\frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} > 0$ car $\pi^2 < 10 < 12$ donc $(\frac{\pi}{2})^2 < 3$. Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un $c \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$ tel que $f(c) = 0$. Ceci signifie que $\tan c = \frac{3}{2}c$, autrement dit, c est une solution de l'équation considérée.

Exercice 3

(a) L'affirmation proposée est fausse. Il est possible de trouver une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires (disons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$), telle que pourtant f ne s'annule jamais sur $[a;b]$. Par exemple, la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, satisfait bien $f(-1) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, et pourtant $f(x)$ n'est jamais nul. Évidemment, f ne saurait être continue, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. De même, si on définit $g\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1729$, alors g est définie sur $[-1;1]$, vérifie $g(-1) = -1 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$, et pourtant g ne s'annule jamais : ceci fournit un second contre-exemple.

(b) L'affirmation proposée est fausse. Par exemple, la fonction $f\colon x \mapsto x^2$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et elle s'annule au moins une fois (en 0), pourtant il n'existe pas a et b tels que $f(a) \times f(b) < 0$. On peut donner d'autres contre-exemples : $x \mapsto -x^2$ ou $x \mapsto |x|$, ou tout simplement $x \mapsto 0$ (la fonction identiquement nulle).

(c) L'affirmation proposée est vraie. Si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \times \lim\limits_{x\to b-} f(x) = -1$, alors ces deux limites (qui sont implicitement supposées exister et être finies) sont non nulles et de signes contraires. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f continue sur $]a;b[$, on voit qu'elle s'annule au moins une fois. (Si on rechigne à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert, avec des limites, on peut toujours procéder ainsi : prolonger f par continuité à une fonction $\hat{f}$ sur $[a;b]$ en définissant $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in]a;b[$, et $\hat{f}(a) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ et $\hat{f}(b) = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$; alors $\hat{f}$ est continue sur $[a;b]$, et $\hat{f}(a)$ et $\hat{f}(b)$ sont de signes contraires, donc le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et donne un $c \in]a;b[$ pour lequel $f(c) = \hat{f}(c) = 0$.)

(d) L'affirmation proposée est fausse. Par exemple, considérons l'application $f\colon [-2;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ lorsque $x \notin \{-1;1\}$, et $f(1) = -1$ et $f(-1) = 1$ (autrement dit, f est égale à la fonction identité partout sauf en 1 et -1, et elle échange ces deux valeurs). Il est clair que f n'est pas continue en -1 ou en 1. En revanche, l'image par f du segment $[-2;2]$ est bien le segment $[-2;2]$ (et même, f est une bijection de $[-2;2]$ sur $[-2;2]$).

On peut donner un autre contre-exemple : considérons la fonction f définie par $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas continue en 0. Pourtant, si $[a;b]$ est un segment *quelconque*, alors l'image par f de $[a;b]$ est un segment. En effet, soit $[a;b]$ ne contient pas 0, auquel cas f y est continue, donc l'image est bien un segment ; soit $[a;b]$ contient 0, auquel cas f y prend toutes les valeurs entre -1 et 1 de sorte que l'image est $[-1;1]$. On a donc donné un exemple de fonction *non continue* par laquelle l'image de *tout segment* est un segment, ce qui est bien plus fort que ce qui était demandé.

En fait, il est même possible de donner des exemples de fonctions $\mathbb{R} \to [0;1]$ (par exemple) telles que l'image de *tout segment* (non réduit à un point) soit $[0;1]$ tout entier. Une telle fonction n'est évidemment continue en aucun point.

(e) L'affirmation proposée est fausse. Par exemple, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, alors $|f|$ est la fonction constante égale à 1, donc évidemment continue, et pourtant f n'est pas continue (elle est discontinue en 0).

Exercice 4

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique. Le fait que f soit périodique signifie qu'il existe un $T > 0$ (une « période ») tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, considérons f restreinte à l'intervalle $[0;T]$: elle y est encore continue. D'après le théorème de Weierstraß (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes), il existe m et M réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [0;T]$, et de surcroît, on peut supposer $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$ pour certains réels $x_0, x_1 \in [0;T]$.

Si $k \in \mathbb{Z}$ est un entier, alors on a $f(x+kT) = f(x)$ (ceci se démontre rapidement par récurrence sur k si $k \geq 0$, et pour $k < 0$ il suffit d'appliquer le résultat pour $k \geq 0$ à $f(x-kT)$). Par conséquent, sur l'intervalle $[kT;(k+1)T]$ on a encore $m \leq f(x) \leq M$.

Or tout $x \in \mathbb{R}$ appartient à (au moins) l'un des intervalles $[kT;(k+1)T]$ ($k \in \mathbb{Z}$) (c'est-à-dire si l'on veut que l'union des intervalles $[kT;(k+1)T]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est $\mathbb{R}$ tout entier). Plus précisément, on a $x \in [kT;(k+1)T]$ avec $k = \mathsf{E}(\frac{x}{T})$ (où E désigne la partie entière) : en effet, $\mathsf{E}(\frac{x}{T}) \leq \frac{x}{T} < \mathsf{E}(\frac{x}{T}) + 1$ implique $kT \leq x < (k+1)T$ si $k = \mathsf{E}(\frac{x}{T})$, et *a fortiori* $kT \leq x \leq (k+1)T$ donc x est dans l'intervalle $[kT;(k+1)T]$.

Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$. Ceci traduit le fait que f est bornée. Comme on a dit qu'on pouvait trouver $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$ (et $x_0, x_1 \in [0;T]$ implique $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$), c'est que f atteint ses bornes.

Exercice 5

Soit $f\colon [0;1] \to [0;1]$ définie et continue. On veut montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$ (on dit que x est un « point fixe » de f). Supposons par l'absurde qu'un tel x n'existe pas. Tout d'abord, $f(0) \neq 0$ (sans quoi 0 serait « un tel x »), donc $f(0) > 0$ (puisque $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout x : c'est l'hypothèse $f\colon [0;1] \to [0;1]$). D'autre part, $f(1) \neq 1$, donc $f(1) < 1$ de même. Mais alors, si g désigne la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$, on voit que $g(0) = f(0) > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$; comme g est continue (car f l'est), g doit s'annuler sur $]0;1[$. Mais on a supposé que $f(x) \neq x$ pour tout x, c'est-à-dire que g ne s'annule jamais : c'est une contradiction.

Supposons maintenant de plus que f est décroissante. On veut montrer que le x tel que $f(x) = x$ est unique. Supposons par l'absurde qu'on ait $f(x_0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$ avec $x_0 \neq x_1$, disons pour fixer les idées que $x_0 < x_1$. Alors $f(x_0) \geq f(x_1)$ (puisque f est décroissante). Mais puisque $f(x_0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$, on est en train d'affirmer $x_0 \geq x_1$, ce qui est difficilement compatible avec $x_0 < x_1$. Boum : contradiction.

Exercice 6

Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ définie et continue, strictement positive partout. Le théorème de Weierstraß nous permet de considérer son minimum m, et nous garantit de plus que ce minimum est atteint sur $[a; b]$, disons $f(c) = m$ avec $c \in [a; b]$. Mais $f(c) > 0$ par hypothèse, de sorte que $m > 0$, et on a bien montré l'existence d'un $\lambda > 0$ (à savoir m) tel que $f(x) \geq \lambda$ pour tout x.

En revanche, si on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $f(x) > 0$ pour tout x, et pourtant il ne saurait exister de réel $\lambda > 0$ tel que $f(x) \geq \lambda$ pour tout x. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et vaut 0 : mais si on avait $f(x) \geq \lambda$ pour tout x, on aurait certainement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq \lambda$ aussi (passage des inégalités larges aux limites), ce qui n'est pas le cas puisque $\lambda > 0$ contredit $0 \geq \lambda$.

Exercice 11

Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ continue bijective. On veut montrer que soit $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, soit $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

Puisque $0 \neq 1$, comme f est bijective, on a $f(0) \neq f(1)$. Par conséquent, soit $f(0) < f(1)$ soit $f(0) > f(1)$. On peut supposer (quitte à remplacer f par $1 - f$, ce qui préserve les hypothèses et la conclusion) qu'on est dans le premier cas.

J'affirme que pour tout $x \in]0; 1[$ on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$. En effet, supposons par l'absurde $f(x) < f(0)$ (le cas $f(x) > f(1)$ se traitant de même) : alors $f(x) < f(0) < f(1)$, c'est-à-dire que le réel $y = f(0)$ est compris entre les valeurs $f(x)$ et $f(1)$ de la fonction f en x et 1 respectivement ; par le théorème des valeurs intermédiaires **appliqué à la fonction f continue sur** $[x; 1]$, il existe $x' \in]x; 1[$ tel que $f(x') = y = f(0)$. Mais $0 < x < x' < 1$, de sorte que $x' \neq 0$, ce qui contredit $f(x') = f(0)$ (puisque f est censée être bijective). L'affirmation est donc démontrée.

Bref, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ pour tout $x \in [0; 1]$ (c'est vrai pour $x \in]0; 1[$ et c'est certainement vrai aussi pour $x = 0$ et $x = 1$!). Mais comme f est bijective, il existe x tel que $f(x) = 0$. On a alors $f(0) \leq 0$; et comme $f(0) \geq 0$ par ailleurs (puisque f est à valeurs dans $[0; 1]$), on en déduit que $f(0) = 0$. De même, on montre que $f(1) = 1$ en considérant un x tel que $f(x) = 1$.

(En fait, la fonction f est soit strictement croissante soit strictement décroissante.)