Corrigé liste d'exercices numéro 1

David A. Madore

3 octobre 2000

Exercice 1

(a) $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ est *fausse* ; contre-exemple : $-3 < 2$ mais $(-3)^2 = 9 \geq 4$.

(b) $(0 < x < y$ et $a < b) \Rightarrow xa < yb$ est *fausse* ; contre-exemple : $0 < 1 < 2$ et $-2 < -1$ mais $1 \times (-2) \geq 2 \times (-1)$.

(c) $(xy \neq 0$ et $x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ est *fausse* ; contre-exemple : $(-1) \times 2 \neq 0$ et $-1 < 2$ mais $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{2}$.

(d) $(xy > 0$ et $x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ est vraie ; en effet, si $xy > 0$ alors x et y sont deux nombres réels non nuls de même signe, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. (*Attention* : il est faux que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.)

Exercice 2

(a) $(b|a$ et $b|c) \Rightarrow b|(a + c)$ est vraie. En effet, si $b|a$ alors il existe un k tel que $a = kb$; et si $b|c$ alors il existe un ℓ tel que $c = \ell b$; on a alors $a + c = (k + \ell)b$; on a donc montré qu'il existe un j tel que $a + c = jb$ (à savoir $k + \ell$), et on a donc $b|(a + c)$.

(b) $b|(a + c) \Rightarrow (b|a$ et $b|c)$ est *fausse* ; contre-exemple : on a $3|(2 + 4)$ mais ni $3|2$ ni $3|4$.

(c) $(b|a$ et $b|(a + c)) \Rightarrow b|c$ est vraie. En effet, si $b|a$, on a $b|(-a)$; puisque $b|(-a)$ et $b|(a + c)$, d'après le résultat de la question (a), on peut conclure $b|((-a) + (a + c))$ soit $b|c$. (*Remarque* : ceci peut également se démontrer directement, comme pour la question (a).)

(d) « Si b est premier avec a et avec c alors b ne divise pas $a + c$ » : cette affirmation est *fausse*, et le contre-exemple donné en (b) convient encore (3 est premier avec 2 et avec 4 mais on a pourtant $3|(2 + 4)$).

Exercice 3

(a) Le produit de deux nombres pairs est pair. Soit $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(a$ pair et b pair $\Rightarrow ab$ pair). En effet, si $a = 2a'$ et $b = 2b'$ (avec a, b, a', b' des entiers) alors $ab = 2 \times (2a'b')$ est pair car il s'écrit $2c$ où $c = 2a'b'$ est un entier.

(b) Le produit de deux nombres impairs est impair. Soit $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(a$ impair et b impair $\Rightarrow$ ab impair). En effet, si $a = 2a' + 1$ et $b = 2b' + 1$ alors $ab = 4a'b' + 2a' + 2b' + 1 = 2c + 1$ où $c = 2a'b' + a' + b'$ est un entier, donc ab est impair.

(c) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Soit $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(a$ pair et b impair$\Rightarrow$ ab pair$)$. En effet, si $a = 2a'$ et $b = 2b'+1$ alors $ab = 2\times(2a'b'+a')$ est pair car il s'écrit $2c$ où $c = 2a'b'+a'$ est un entier.

Remarque : On peut résumer ces trois affirmations en disant que *le produit de deux entiers est pair si et seulement si l'un (au moins) de ces deux entiers l'est*.

(d) On a $(\forall m \in \mathbb{Z})(m$ pair $\Leftrightarrow m^2$ pair$)$. En effet, si m est pair alors m^2 est pair comme le produit de deux nombres pairs (partie (a)) ; réciproquement, si m^2 est pair, alors m ne peut pas être impair, car, s'il l'était, m^2 serait le produit de deux nombres impairs, donc impair (partie (b)), ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, m est pair si et seulement si m^2 est pair.

Exercice 4

(a) La contraposée de n premier $\Rightarrow (n = 2$ ou n impair$)$ est $(n \neq 2$ et n pair$) \Rightarrow n$ composé. C'est juste, car si n est pair, il s'écrit $n = 2n'$ avec n' entier naturel ; et on a $n' \neq 1$ car $n \neq 2$; donc on a écrit n comme le produit de deux naturels différents de 1, ce qui montre que n est composé.

(b) La contraposée de $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0$ et $y \neq 0)$ est $(x = 0$ ou $y = 0) \Rightarrow xy = 0$. C'est juste, car $0 \times y = 0$ et $x \times 0 = 0$ quels que soient les réels x et y.

(c) La contraposée de $(x \neq y) \Rightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$ est $[(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)] \Rightarrow (x = y)$. C'est juste car si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en développant $xy+y-x-1 = xy+x-y-1$, donc $y - x = x - y$, donc $2x = 2y$, donc $x = y$.

Exercice 5

Rappel : Le produit de deux entiers est pair si et seulement si l'un (au moins) de ces deux entiers l'est ; la somme de deux entiers est paire si et seulement si ces deux entiers ont même parité (c'est-à-dire sont tous deux pairs ou tous deux impairs). (En des termes moins sibyllins, le produit de deux pairs ou d'un pair et d'un impair, est pair, tandis que le produit de deux impairs est impair ; et la somme de deux pairs ou de deux impairs est paire, tandis que la somme d'un impair et d'un pair est impaire.)

Soient n et p deux entiers naturels. Si l'un des deux au moins est pair, alors leur produit np est pair (voir les parties (a) et (c) de l'exercice 3), donc on a fini. Supposons maintenant que n et p soient tous deux impairs. Alors $n = 2m+1$ et $p = 2q+1$ pour certains naturels m et q. On a $n^2-p^2 = 4[(m^2+m)-(q^2+q)]$. Ceci montre déjà que $n^2 - p^2$ est multiple de 4, et on veut donc encore montrer que $(m^2 + m) - (q^2 + q)$ est pair (multiple de 2). C'est la différence de deux nombres, et il suffit donc de montrer que tous deux sont pairs (car la différence de deux nombres pairs est paire). Bref, on est ramené à montrer que $r^2 + r$ est pair quel que soit r entier naturel. Mais si r est pair alors r^2 l'est aussi (voir le (d) de l'exercice 3) donc $r^2 + r$ est pair (comme somme de deux nombres pairs) ; et si r est impair alors r^2 l'est aussi (toujours par le (d) de l'exercice 3) donc $r^2 + r$ est pair comme somme de deux nombres impairs.

Exercice 6

Première méthode : Supposons par l'absurde $n^2 + 1$ carré d'un entier naturel, disons $n^2 + 1 = m^2$. Alors $m^2-n^2 = 1$, soit $(m+n)(m-n) = 1$. Or le produit de deux entiers est égal à 1 si et seulement si ces deux entiers sont soit tous deux égaux à 1 soit tous deux égaux à -1. On a donc soit $m+n=m-n=1$ soit $m+n=m-n=-1$. Dans le premier cas on résout immédiatement $m=1$ et $n=0$, ce qui contredit l'hypothèse faite de $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le second cas on trouve $m=-1$ et $n=0$, ce qui contredit l'hypothèse faite de $m \in \mathbb{N}$.

Deuxième méthode : On a évidemment $n^2 < n^2+1 < n^2+2n+1$ lorsque $n>0$. La fonction racine carrée ($t \mapsto \sqrt{t}$) est strictement croissante, donc on peut prendre la racine carrée de chacun des membres de cette inégalité, et on trouve $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$ (on aura remarqué que $n^2+2n+1=(n+1)^2$). Mais alors $\sqrt{n^2+1}$ est strictement compris entre un entier naturel (n) et son successeur ; donc ce n'est certainement pas un entier naturel.

Exercice 7

(a) Pour $n=1$ cette propriété affirme que $1 \times 1! = (1+1)!-1$, ce qui est vrai. Supposons maintenant la propriété vraie au rang k et montrons qu'elle l'est encore au rang $k+1$. On veut donc montrer que

$$1 \times 1! + \cdots + k \times k! + (k+1) \times (k+1)! = (k+2)! - 1$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, le membre de gauche s'écrit $(k+1)!-1+(k+1)\times(k+1)!$, ce qui est encore $(k+2)\times(k+1)!-1$, soit $(k+2)!-1$, ce qu'il fallait démontrer. Une récurrence permet de conclure.

(b) On procède encore par récurrence. Pour $n=1$ cette propriété affirme que $\sqrt{1} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1}$, ce qui est vrai. Supposons maintenant la propriété vraie au rang k et montrons qu'elle l'est encore au rang $k+1$. On suppose donc que

$$\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} \qquad (1)$$

et on veut montrer que

$$\sqrt{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \qquad (2)$$

En rajoutant $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ aux membres de l'inégalité (1) on voit que

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad (3)$$

Pour arriver à la conclusion désirée, il suffit donc de montrer que $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$ et que $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}$. Pour ce qui est de la première de ces inégalités, elle est équivalente à $\sqrt{k} \geq \sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$; comme les deux membres sont positifs (c'est évident pour le membre de gauche, et pour le membre de droite c'est vrai car $\sqrt{k+1} \geq 1$), elle est encore équivalente à l'inégalité obtenue en élevant les deux membres au carré, c'est-à-dire $k \geq (k+1) - 2 + \frac{1}{k+1}$, ce qui est clair. Pour ce qui est de la seconde de ces inégalités, elle est équivalente à $2\sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$; comme les deux membres sont positifs (si c'était vrai pour la précédente, ce l'est encore pour celle-ci !), elle est encore équivalente à l'inégalité obtenue en élevant les deux membres au carré, c'est-à-dire $4k \leq 4(k+1) - 4 + \frac{1}{k+1}$, ce qui est clair.

(c) Procédons de nouveau par récurrence pour montrer que la propriété est vraie lorsque $n \geq 4$. Pour $n = 4$ elle affirme que $16 = 4^2 < 4! = 24$, ce qui est certain. Supposons-la maintenant vérifiée au rang k, avec $k \geq 4$, et montrons qu'elle l'est au rang $k+1$. On suppose donc $k^2 < k!$. On veut montrer $(k+1)^2 < (k+1)!$, soit $(k+1) \times (k+1) < (k+1) \times k!$, ce qui équivaut encore (puique $k+1 > 0$) à $k+1 < k!$. Mais on sait que $k^2 < k!$. On a donc gagné dès lors que $k+1 \leq k^2$. Mais pour $k \geq 2$ (donc *en particulier* pour $k \geq 4$) on a $k^2 = k \times k \geq 2 \times k = k + k \geq k + 2 \geq k + 1$. Ceci conclut la récurrence. Notons que la propriété étudiée est vraie pour $n = 0$ (ce qui ne suffit pas à intialiser la récurrence car on avait besoin de $k \geq 2$ au moins) et fausse pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$.

(d) Rappelons que *la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, dont le premier est a et le dernier b, vaut* $n(a+b)/2$. Les nombres impairs forment une suite arithmétique (de raison 2). La somme des n premiers nombres impairs, dont le premier est 1 et le n-ième est $2n-1$, est donc $n \times (1+2n-1)/2$, soit précisément n^2. (On peut aussi procéder par récurrence, mais j'ai la flemme de le faire.)

(e) Commençons par rappeler que pour u et v deux nombres réels quelconques, on a $\sin(u+v) = \sin u \, \cos v + \cos u \, \sin v$. Par conséquent, $|\sin(u+v)| \leq |\sin u \, \cos v| + |\cos u \, \sin v|$ (inégalité triangulaire), soit $|\sin(u+v)| \leq |\sin u| \, |\cos v| + |\cos u| \, |\sin v|$. Mais $|\cos x| \leq 1$ pour tout x, donc $|\sin u| \, |\cos v| \leq |\sin u|$ et de même $|\cos u| \, |\sin v| \leq |\sin v|$. Finalement, $|\sin(u+v)| \leq |\sin u| + |\sin v|$, ce qu'on peut encadrer. On peut alors montrer par récurrence sur n que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$ (pour tout θ réel et pour tout n naturel). Rapidement : c'est vrai pour $n = 0$; et si c'est vrai pour k alors $|\sin[(k+1)\theta]| = |\sin(k\theta + \theta)| \leq |\sin(k\theta)| + |\sin\theta|$ donc $|\sin[(k+1)\theta]| \leq k|\sin\theta| + |\sin\theta| = (k+1)|\sin\theta|$ par hypothèse de récurrence, ce qui conclut. Lorsque $\theta \in [0; \pi]$, on peut laisser tomber les valeurs absolues autour de $\sin\theta$.