Définition 1. *Un ensemble E est dit transitif ssi pour tout $x \in E$ et tout $y \in x$ on a $y \in E$.*

Définition 2. *Un ensemble α est un ordinal ssi α est transitif et α est bien-ordonné (strictement) par la relation $\in$ (d'appartenance).*

Théorème 3 (AR). *Un ensemble α est un ordinal ssi α est transitif et α est totalement ordonné (strictement) par la relation $\in$ (d'appartenance).*

Démonstration : soit $\alpha' \subseteq \alpha$. Si α' n'est pas vide, on applique Régularité. Il existe un $x \in \alpha'$ tel que $x \cap \alpha' = \emptyset$. Soit $y \in \alpha'$ quelconque. On ne peut pas avoir $y \in x$ et $y \in \alpha'$ donc $y \notin x$. Il s'ensuit que $x \in y$ ou $x = y$ car α est totalement ordonné. Par suite, x est le plus petit élément de α', donc tout sous-ensemble non-vide de α a un plus petit élément. Donc α est bien-ordonné, donc c'est un ordinal. (C.Q.F.D.)

Théorème 4. *$\emptyset$ est un ordinal. Si α est un ordinal alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal.*

Démonstration : $\emptyset$ est un ordinal (trivial). Soit α un ordinal, et soit $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$. Si $x \in \alpha'$ et $y \in x$ alors soit $x \in \alpha$ (alors $y \in \alpha$ car α est transitif et donc $y \in \alpha'$), soit $x = \alpha$ (alors $y \in \alpha$ donc $y \in \alpha'$), donc $y \in \alpha'$ donc α' est transitif.

On vérifie aisément que $\in$ est une relation d'ordre strict sur α' qui prolonge $\in$ sur α. Si $\alpha'' \subseteq \alpha'$ n'est pas vide alors soit $\alpha \notin \alpha''$ (alors $\alpha'' \subseteq \alpha$ donc α'' a un plus petit élément car α est bien-ordonné) soit $\alpha \in \alpha''$ alors on pose $\alpha^* = \alpha'' \setminus \{\alpha\}$; si α^* est vide alors $\alpha'' = \{\alpha\}$ donc a un plus petit élément, α ; sinon, α^* a un plus petit élément car $\alpha^* \subseteq \alpha$ et que α est bien-ordonné ; comme pour tout $x \in \alpha^*$, $x \in \alpha$, en particulier c'est vrai pour le plus petit élément de α^* qui reste donc plus petit élément de α'', donc dans tous les cas α'' a un plus petit élément. Donc α' est bien-ordonné, donc c'est un ordinal. (C.Q.F.D.)

Définition 5. *Si α est un ordinal, on note $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. On pose $0 = \emptyset$, $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, etc. Si α et α' sont des ordinaux, on note $\alpha < \alpha'$ pour $\alpha \in \alpha'$, $\alpha \leq \alpha'$ pour $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$, $\alpha > \alpha'$ (resp. $\alpha \geq \alpha'$) pour $\alpha' < \alpha$ (resp. $\alpha' \leq \alpha$).*

Théorème et définition 6. *Il existe un unique ensemble noté ω tel que $0 \in \omega$, que si $\alpha \in \omega$ alors $\alpha^+ \in \omega$, et que si pour un ensemble ω' on a $0 \in \omega'$ et $\alpha \in \omega'$ entraîne $\alpha^+ \in \omega'$, alors $\omega \subseteq \omega'$.*

Démonstration : On appellera $I(\omega_i)$ la propriété : $0 \in \omega_i$ et si $\alpha \in \omega_i$ alors $\alpha^+ \in \omega_i$. Et on appellera $N(\omega_i)$ la propriété : $I(\omega_i)$ et si $I(\omega_i')$ alors $\omega_i \subseteq \omega_i'$. On veut donc montrer l'existence d'un unique ω tel que $N(\omega)$.

L'unicité de ω est évidente car si $N(\omega_1)$ et $N(\omega_2)$ alors $\omega_1 \subseteq \omega_2$ et $\omega_2 \subseteq \omega_1$, donc (par l'axiome d'extension) $\omega_1 = \omega_2$.

L'axiome de l'infini se traduit par l'existence d'un ω_i tel que $I(\omega_i)$.

Si $I(\omega_i)$, on note ω_i^* l'intersection de toutes les parties ω_p de ω_i telles que $I(\omega_p)$. Comme $I(\omega_i)$, cette intersection existe. Si $I(\omega_p)$ avec $\omega_p \subseteq \omega_i$ alors $\omega_i^* \subseteq \omega_p$. Soient ω_1 et ω_2 tels que $I(\omega_1)$ et $I(\omega_2)$, et que $\omega_1 \subseteq \omega_2$. Alors $\omega_2^* \subseteq \omega_1$ (car $I(\omega_1)$) et donc $\omega_1^* \subseteq \omega_2^*$ (car $I(\omega_2^*)$). Par ailleurs, si $x \in \omega_2^*$ et que $\omega_p \subseteq \omega_1$

et $I(\omega_p)$ alors $\omega_p \subseteq \omega_2$ donc $\omega_2^* \subseteq \omega_p$, donc $x \in \omega_p$; donc $x \in \omega_1^*$ (par définition de ω_1^*). Donc $\omega_2^* \subseteq \omega_1^*$. Donc $\omega_1^* = \omega_2^*$ (par l'axiome d'extension). Soient maintenant ω_1 et ω_2 quelconques tels que $I(\omega_1)$ et $I(\omega_2)$, et soit $\omega_i = \omega_1 \cap \omega_2$. Alors $\omega_1^* = \omega_i^* = \omega_2^*$.

Soit ω_i un ensemble quelconque tel que $I(\omega_i)$ (il existe par l'axiome de l'infini). Nous avons vu que ω_i^* est indépendant du choix de ω_i. On le notera ω. Soit ω_j tel que $I(\omega_j)$. Alors $\omega = \omega_j^*$ donc $\omega \subseteq \omega_j$. Donc $N(\omega)$. (C.Q.F.D.)

Théorème 7 (règle de récurrence). *Si $\omega' \subseteq \omega$, que $0 \in \omega'$ et que $\alpha \in \omega'$ entraîne $\alpha^+ \in \omega'$, alors $\omega' = \omega$.*

Démonstration : on a $\omega' \subseteq \omega$. Par ailleurs, par la définition de ω, $\omega \subseteq \omega'$. Donc (par l'axiome d'extension), $\omega' = \omega$. (C.Q.F.D.)

Théorème 8. *ω est ordinal, et tous ses éléments sont des ordinaux.*

Démonstration : soit ω' l'ensemble des éléments de ω qui sont des ordinaux. $\omega' \subseteq \omega$, $0 \in \omega'$ et si $\alpha \in \omega'$ alors $\alpha^+ \in \omega'$ (théorème 4). Donc $\omega' = \omega$ donc tous les éléments de ω sont des ordinaux.

Soit ω' l'ensemble des $\alpha \in \omega$ tels que si $\alpha' \in \alpha$ alors $\alpha' \in \omega$. On a $\omega' \subseteq \omega$, $0 \in \omega'$. Si $\alpha \in \omega'$ et que $\alpha' \in \alpha^+$ alors soit $\alpha' \in \alpha$ (alors $\alpha' \in \omega$ car $\alpha \in \omega'$), soit $\alpha' = \alpha$ (alors $\alpha' \in \omega$ car $\alpha \in \omega$) ; donc $\alpha^+ \in \omega'$. Donc, par le théorème 7, $\omega' = \omega$. Donc ω est transitif.

On vérifie aisément que ω est ordonné par $\geq$: la réflexivité et la transitivité sont évidentes. L'antisymétrie se vérifie ainsi : si $\alpha \in \alpha'$ et $\alpha' \in \alpha$ alors $\alpha \in \alpha$ (car α est un ordinal donc transitif), donc α n'est pas ordonné (strictement) par $\in$, donc il n'est pas un ordinal, ce qui est une contradiction.

Enfin, montrons que ω est bien-ordonné : soit $\alpha \subseteq \omega$ non-vide et soit $\alpha' \in \alpha$ quelconque. Soit $\alpha^* = \alpha \cup \alpha'$. Si α^* est vide, α' est le plus petit élément de α, sinon, α^* a un plus petit élément (car α' est un ordinal), et on vérifie qu'il est aussi le plus petit élément de α. Donc ω est bien-ordonné.

Donc ω est un ordinal, et tous ses éléments sont des ordinaux. (C.Q.F.D.)