Eléments d'une introduction aux débuts du commencement des rudiments de la Géométrie Riemannienne

Topologie différentielle

Soit E un espace topologique séparé et n un naturel. Une *carte de dimension* n sur E est un couple (U, φ) où U est un ouvert de E et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dira alors que U est le *domaine* de la carte. Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) de dimension n de E sont dites C^r*-compatibles* $(1 \leq r \leq \infty)$ ssi $\psi\varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est un C^r-difféomorphisme. C'est nécessairement le cas si les domaines sont disjoints. Elles sont dites C^r*-orientées-compatibles* ssi elles sont C^r-compatibles et que de plus $\psi\varphi^{-1}$ préserve l'orientation de $\mathbb{R}^n$ (i.e. la différentielle $D(\psi\varphi^{-1})$ a en tout point de $\varphi(U \cap V)$ un déterminant positif). Il s'agit évidemment de relations d'équivalence entre cartes. Un C^r*-atlas* (resp. un C^r*-atlas orienté*) de dimension n sur E est un ensemble de cartes de dimension n deux-à-deux C^r-compatibles (resp. deux-à-deux C^r-orientées-compatibles), dont les domaines recouvrent E. Un C^r-atlas (resp. un C^r-atlas orienté) de dimension n sur E maximal (pour l'inclusion) est appelée *structure de variété* C^r *de dimension* n (resp. *structure de variété* C^r *orientée de dimension* n) sur E ; un espace topologique muni d'une structure de variété (...) est appelé une variété (...). Tout C^r-atlas (resp. C^r-atlas orienté) de dimension n sur E est inclus dans une unique structure de variété C^r (resp. structure de variété C^r orientée) de dimension n : c'est l'ensemble de toutes les cartes compatibles (...) avec l'atlas donné. Dans la suite de la discussion, on omettra le plus souvent la précision de la dimension et de la classe.

On fera de plus la convention suivante : toutes les variétés considérées seront paracompactes et séparables (ayant une base dénombrable). Ceci exclut les cas pathologiques comme $\Omega \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(0,0)\}$ ou la somme d'un nombre indénombrable de copies de $\mathbb{R}$.

Une application $f: M \to M'$ entre variétés C^r est appelée un *application lisse* ou *de classe* C^r ssi pour toute carte (U, φ) de M et pour toute carte (V, ψ) de M', l'application $\psi f \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V \cap f(U))$ est de classe C^r. Les variétés, avec comme morphismes les applications lisses, forment alors une catégorie, dont les équivalences sont appelées C^r*-difféomorphismes* : un difféomorphisme θ est une application bijective, lisse et de réciproque lisse. Pour les variétés orientées, on laisse le soin au lecteur de définir les difféomorphismes positifs.

Une partie A d'une variété M de dimension n est appelée une sous-variété de dimension k ssi tout point de A appartient au domaine d'une carte (U, φ) de M tel que $U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k)$ ($\mathbb{R}^k$ étant évidemment identifié à une partie de $\mathbb{R}^n$). $(U \cap A, \varphi)$ forme alors une carte de A et l'ensemble des telles cartes définit un atlas sur A ; par conséquent, A est muni canoniquement d'une structure de variété.

Nous nous proposons à présent de définir le *fibré tangent* TM d'une variété M de dimension n et de classe C^{r+1}. On considère pour cela des quadruplets (a, U, φ, x) où (U, φ) est une carte de M, m un point de U et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit une relation d'équivalence sur ces quadruplets par $(a, U, \varphi, x) \sim (b, V, \psi, y)$ ssi $a = b$ et $(D_{\varphi(a)}\psi\varphi^{-1})x = y$ ($D_{\varphi(a)}\psi\varphi^{-1}$ désignant la différentielle de $\psi\varphi^{-1}$ au point $\varphi(a)$). Il s'agit bien d'une relation d'équivalence par la formule de composition des différentielles $(D_{\psi(a)}\chi\psi^{-1})(D_{\varphi(a)}\psi\varphi^{-1}) = D_{\varphi(a)}\chi\varphi^{-1}$. La classe d'équivalence de (a, U, φ, x) sera alors notée $[a, U, \varphi, x]$; l'ensemble de ces classes constitue le fibré tangent TM de M. Si (U, φ) est une carte de M, on définit TU et $T\varphi$ par $TU = \{[a, U, \varphi, x]: a \in U, x \in \mathbb{R}^n\}$ et

$$T\varphi: TU \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$[a, U, \varphi, x] \mapsto (\varphi(a), x)$$

On vérifie aisément qu'il existe une unique topologie sur TM pour laquelle les TU sont ouverts et les $T\varphi$ des homéomorphismes ; pour cette topologie, l'ensemble des couples $(TU, T\varphi)$ est un C^r-atlas sur TM. La dimension de TM est $2n$. L'application $p: [a, U, \varphi, x] \mapsto a$ est bien définie et elle est lisse ; pour tout point $a \in M$, $p^{-1}(a) = T_aM$ s'appelle *espace tangent* en a : il s'agit d'une sous-variété de TM de dimension n, mais il a aussi une structure d'espace vectoriel, obtenue au moyen d'un isomorphisme $[a, U, \varphi, x] \mapsto x$ avec $\mathbb{R}^n$, (U, φ) étant une carte dont le domaine contient a. Un élément de l'espace tangent T_aM à M en a s'appelle *vecteur basé en* a. Une application lisse $\chi: M \to TM$ telle que $p\chi = \mathrm{id}_M$ (c'est-à-dire $\chi(a) \in T_aM$ pour tout a) s'appelle *champ de vecteurs* (lisse) sur M (ou *section du fibré tangent*).

Si $f: M \to M'$ est une application lisse entre variétés, on obtient une application lisse $T\varphi: TM \to TM'$ en posant, lorsque (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de M et M' respectivement, avec $f(U) \subseteq V$, $Tf: [a, U, \varphi, x] \mapsto$

$[f(a), V, \psi, (D_{\varphi(a)}(\psi f \varphi^{-1}))x]$. Lorsque $f(a) = b$, Tf induit une application linéaire de T_aM vers T_bM', que l'on note T_af. Tf s'appelle parfois différentielle de f, et T_af différentielle de f en a.

Une application lisse $f\colon M \to M'$ entre variétés est appelée une *immersion* ssi sa différentielle T_af est injective en tout point $a \in M$, une *submersion* ssi T_af est surjective en tout point $a \in M$, un *plongement* ssi f est une immersion qui est un un homéomorphisme sur $f(M)$. On notera qu'il existe des immersions injectives qui ne sont pas des plongements. Il est clair que l'image d'un plongement est une sous-variété, et la réciproque est d'ailleurs vraie (toute sous-variété est l'image d'un plongement). On peut montrer que toute variété de classe C^r de dimension n peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire que pour toute variété M de classe C^r et de dimension n il existe un plongement $M \to \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^r.

Coordonnées et tenseurs

Nous passons maintenant de l'angle topologique à l'angle géométrique, c'est-à-dire que l'étude de la structure globale de la variété sera abandonnée au profit de celle de sa structure locale, puis métrique. Pour simplifier l'étude, toutes les variétés seront désormais supposées C^∞.

Une carte (U, φ) sur une variété M de dimension n sera aussi appelée un *système de coordonnée* sur M. Si $a \in U$, on parlera aussi de système de coordonnées en a. Un tel système détermine une base sur T_aM appelée *base canonique* associée au système (U, φ) : si $(e_\mu)_{1 \le \mu \le n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la base canonique de T_a est $([a, U, \varphi, e_\mu])_\mu$. Il est important de noter que cette base dépend du choix du système de coordonnées choisi au point a.

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux systèmes de coordonnées en a, la matrice de passage de la base canonique associée à (U, φ) à celle associée à (V, ψ) n'est autre que la matrice représentative de $D_{\psi(a)}\varphi\psi^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle *matrice jacobienne (au point a) associée au changement de coordonnées*, et on la note (pour des raisons qui apparaîtront plus tard) $(J^\mu_i)_{\mu,i}$, μ étant l'indice de ligne et i l'indice de colonne. Lorsque $(u_\mu)_\mu$ désigne la base canonique associée à (U, φ) et $(v_i)_i$ celle associée à (V, ψ), on a $v_i = \sum_{\mu=1}^n J^\mu_i u_\mu$.

Avec les notations du paragraphe précédent, on pourra par exemple appeler x^μ les coordonnées de (U, φ) et y^i celles de (V, ψ). Plus précisément, x^μ est, pour tout $1 \le \mu \le n$, une application de U vers $\mathbb{R}$ qui n'est autre que $e^{\mu *}\varphi$, où $(e^{\mu *})_\mu$ est la base duale de la base canonique $(e_\mu)_\mu$ de $\mathbb{R}^n$. De même, pour tout i, y^i est l'application composée $e^{i*}\psi$ de V vers $\mathbb{R}$. Si $\gamma\colon U \to \mathbb{R}$ est une application C^∞, on désignera (abusivement il est vrai) par $\frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu}$ la dérivée partielle dans la direction e_μ de l'application $\gamma\varphi^{-1}$, c'est-à-dire $(D\gamma\varphi^{-1})e_\mu$. La matrice jacobienne au point a s'écrit alors

$$J^\mu_i = e^{\mu *}(D_{\psi(a)}\varphi\psi^{-1})e_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}$$

On remarquera par ailleurs que l'application $T_a\gamma$ (en identifiant $T_a\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$) n'est autre que $\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} u^{\mu *}$ où $(u^{\mu *})_\mu$ est la base conjuguée de la base canonique $(u_\mu)_\mu$ de T_aM associée à (U, φ). On écrit aussi souvent $\mathrm{d}x^\mu$ pour $u^{\mu *}$ et $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ pour u_μ.

A ce point, il est peut-être utile de faire une convention : c'est la *convention de sommation d'Einstein* : lorsqu'un indice est présent dans le même terme d'une expression “en haut” et “en bas”, il faut sous-entendre une sommation sur cet indice. On écrira donc $v_i = J^\mu_i u_\mu$, et il faudra comprendre $v_i = \sum_{\mu=1}^n J^\mu_i u_\mu$, et de même dans les autres cas.

Un élément de T_aM, l'espace tangent à M en a s'appelle un vecteur en a ; l'espace dual, noté T^*_aM sera appelé *espace cotangent* à M en a et ses éléments seront appelés *covecteurs* ou 1-*formes* en a. On pourrait aisément munir la réunion disjointe T^*M de tous les T^*_aM d'une structure de variété, mais nous ne le ferons pas. Dans un système de coordonnées (U, φ) en a, un covecteur ω se décompose dans la base canonique $(\mathrm{d}x^\mu)_\mu$ de T^*_aM (conjuguée de la base canonique de T_aM) sous la forme $\omega = \omega_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$. Sous l'effet d'un changement de coordonnées, on peut aisément vérifier que la matrice de passage pour les bases canoniques de T^*_aM est, avec les notations utilisées précédemment, la matrice *jacobienne inverse* J^{*i}_μ inverse de la matrice jacobienne, c'est-à-dire que $J^\mu_i J^{*j}_\mu = \delta^j_i$ et $J^\mu_i J^{*i}_\nu = \delta^\mu_\nu$ où δ désigne le delta de Kronecker.

Pour récapituler les transformations de coordonnées, soient (U, φ) et (V, ψ) deux systèmes de coordonnés en a ; on note $(x^\mu)_\mu$ les coordonnées dans (U, φ) et $(y^i)_i$ les coordonnées dans (V, ψ). On suppose que x est un vecteur en a et ω un covecteur en a, que $(x^\mu)_\mu$ et $(x^i)_i$ sont les coordonnées de x sur les bases canoniques

$(u_\mu)_\mu$ et $(v_i)_i$ associées respectivement à (U,φ) et (V,ψ), et que $(\omega_\mu)_\mu$ et $(\omega_i)_i$ sont les coordonnées de ω dans les bases duales correspondantes. Alors on a

$$x^\mu = J_i^\mu x^i \text{ et } \omega_\mu = J_\mu^{*i}\omega_i$$

$$\langle x,\omega\rangle = x^\mu\omega_\mu = J_i^\mu J_\mu^{*j} x^i\omega_j = \delta_i^j x^i \omega_j = x^i\omega_i$$

$$J_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \text{ et } J_\mu^{*i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}$$

Un *champ de covecteurs* est une application $\beta\colon M \to T^*M$ telle que $\beta(a) \in T_a^*M$ pour tout $a \in M$. Ce champ sera dit lisse ssi pour tout système de coordonnées (U,φ), les composantes de $\beta(a)$ sur la base canonique forment une application C^∞ de U dans $\mathbb{R}^n$.

On appelle tenseur contravariant d'ordre k et covariant d'ordre l au point a un élément de

$$T_{(l)}^{(k)} = T_aM \otimes \cdots \otimes T_aM \otimes T_a^*M \otimes \cdots \otimes T_a^*M$$

(cette expression comporte k facteurs T_a et l facteurs T_a^*). Donné un système de coordonnées (U,φ) en a, on a une base canonique de $T_{(l)}^{(k)}$ de la forme $u_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}$, obtenue en prenant le produit des bases canoniques des différents facteurs de $T_{(l)}^{(k)}$. Un tenseur W s'écrit alors dans cette base comme :

$$W = u_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} W_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$$

Sous l'effet d'un changement de coordonnées, les notations étant comme d'habitudes, le tenseur se transforme ainsi :

$$W_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} = J_{i_1}^{\mu_1} J_{i_2}^{\mu_2}\cdots J_{i_k}^{\mu_k} J_{\nu_1}^{*j_1} J_{\nu_2}^{*j_2}\cdots J_{\nu_l}^{*j_l} W_{j_1 j_2\ldots j_l}^{i_1 i_2\ldots i_k}$$

On fait les mêmes conventions relatives aux champs de tenseurs que pour les champs de covecteurs.

Introduction d'une métrique

Une *variété riemannienne* est une variété sur laquelle on s'est donnée un champ lisse de tenseurs covariants d'ordre 2 et contravariants d'ordre 0, qui, identifié à une forme bilinéaire symétrique, est positif défini. En autres mots, on se donne en tout point un tenseur, universellement noté g, qui dans tout système de coordonnées est représenté par une matrice $(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu}$ symétrique définie positive. Ce tenseur s'appelle la *métrique* ou *forme fondamentale* de la variété riemannienne. Pour indiquer les composantes de la métrique, on utilise généralement une écriture symbolique du type

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$$

dans un certain système de coordonnées (par exemple, on dira que la métrique du plan en coordonnées polaires est donnée par $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$).

La métrique détermine une structure euclidienne sur les espaces tangents, ce qui permet de calculer la norme d'un vecteur (en a) :

$$||p||^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$$

en fonction de ses coordonnées avec les notations évidentes, et le produit scalaire de deux vecteurs :

$$p \cdot q = g_{\mu\nu}p^\mu q^\nu$$

De plus, la métrique induit un isomorphisme canonique entre les fibrés tangent et cotangent, ou, en termes moins savants, permet de "monter et descendre" les indices : le covecteur canoniquement associé au vecteur $p = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ est le covecteur $\omega = \omega_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ tel que $\langle q, \omega\rangle = p \cdot q$ pour tout vecteur q en a. En notant q^μ les coordonnées de $q = q^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ dans la base canonique, on a $\langle q, \omega\rangle = q^\nu \omega_\nu$ et $p \cdot q = g_{\mu\nu}p^\mu q^\nu$, d'où l'on tire de manière évidente $\omega_\nu = g_{\mu\nu}p^\mu$. On va même encore plus loin en identifiant complètement espaces tangent et cotangent, et on écrit alors $p_\nu = g_{\mu\nu}p^\mu$: la place des indices ne sert alors plus qu'à préciser sur quelle base on décompose le vecteur-covecteur : les indices sont en haut si l'on décompose sur la base de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, en bas si l'on décompose sur la base de covecteurs $\mathrm{d}x^\mu$.

Evidemment, si la matrice $g_{\mu\nu}$ sert à baisser les indices, la matrice inverse doit servir à les monter. Celle-ci est symétrique, se note $g^{\mu\nu}$ et vérifie $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$. On peut alors monter les indices : $\omega^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu$.

La métrique permet de calculer bien plus que la norme d'un vecteur : elle donne également la longueur d'un arc, l'aire d'une surface, etc. Nous allons nous contenter d'avancer sans justification la formule donnant la longueur d'un arc paramétré : si $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$ est une application C^∞ à valeurs dans une variété riemannienne, on définit sa longueur par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt$$

en notant $(x^\mu)_\mu$ les coordonnées de $\gamma(t)$, le t étant sous-entendu. Cette formule s'écrit encore symboliquement

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt$$

et s est appelé l'élément d'arc, ou abscisse curviligne.

La connexion

Pour comprendre le rôle de la connexion, partons de la différentielle d'un champ (lisse) de scalaires $\gamma: M \to \mathbb{R}$, elle s'écrit $T\gamma: TM \to T\mathbb{R}$, et s'identifie facilement à un champ de covecteurs : on a $T\gamma([a, U, \varphi, x]) = [\gamma(a), \mathbb{R}, \mathrm{id}, (D_{\varphi(a)}\gamma\varphi^{-1})x]$, on identifie $T\gamma$ au champ ω de covecteurs donné par $\omega(a)([a, U, \varphi, x]) = (D_{\varphi(a)}\gamma\varphi^{-1})x$ ce qui au niveau des coordonnées se traduit par

$$\omega_\mu = \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu}$$

et tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes. L'important est qu'au niveau d'un changement de coordonnées, les coordonnées de ω se transforment bien comme elles devraient : cela se vérifie sans mal par

$$\omega_\mu = \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial \gamma}{\partial y^i} = J^{*i}_\mu \omega_i$$

En revanche, si $\gamma: M \to TM$ est un champ de vecteurs lisse donné, du moins dans l'ouvert U, par $\gamma(a) = [a, U, \varphi, \hat{\gamma}(a)]$, les choses sont loin de se passer aussi bien. On a en effet $T\gamma: TM \to TTM$ qui prend la forme :

$$T\gamma([a, U, \varphi, x]) = [[a, U, \varphi, \hat{\gamma}(a)], TU, T\varphi, (x, (D_{\varphi(a)}\hat{\gamma}\varphi^{-1})x)]$$

L'identification naïve serait avec un champ ω de tenseurs covariants d'ordre 1 et contravariants d'ordre 1 déterminés par :

$$\omega(a)([a, U, \varphi, x]) = [a, U, \varphi, (D_{\varphi(a)}\hat{\gamma}\varphi^{-1})x]$$

Cependant, un calcul facile (mais fastidieux) montre que ceci dépend du système de coordonnées (U, φ) choisi. La définition n'est donc pas valable. Ceci peut également se voir sans difficulté au niveau des coordonnées : on a

$$\frac{\partial \gamma^\rho}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\gamma^j \frac{\partial x^\rho}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \gamma^j}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^j} + \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^j} = \frac{\partial \gamma^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^j} + \gamma^j \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^i \partial x^j}$$

Le premier terme est semblable à ce qu'on attend des coordonnées d'un tenseur de type ω^ρ_μ sous l'effet d'un changement de coordonnées, mais le second terme est indésirable. La raison de ce problème est que dans l'élément de TTM, $[[a, U, \varphi, \underline{\hat{\gamma}(a)}], TU, T\varphi, (x, (D_{\varphi(a)}\hat{\gamma}\varphi^{-1})x)]$ on a totalement éliminé le terme souligné, alors qu'il aurait dû avoir "son mot à dire". Pour le lui donner, on va introduire une *connexion*, c'est-à-dire un symbole $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, symétrique en μ et ν, qui se transforme sous l'effet d'un changement de coordonnées de manière non standard (i.e. pas comme un tenseur contravariant d'ordre 1 et covariant d'ordre 2), et définir pour un champ de vecteurs γ^ρ une *dérivée covariante* par :

$$\gamma^\rho_{;\mu} = \frac{\partial \gamma^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

de façon que $\gamma^\rho_{;\mu}$ se comporte comme un tenseur sous l'effet d'un changement de coordonnées. Le point-virgule dans l'expression ci-dessus est commun pour désigner la dérivée covariante.

Nous affirmons, sans justification aucune, que pour une variété riemannienne, la connexion vaut $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ où $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ est le *symbole de Christoffel du second type* sur la métrique, défini par :

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = g^{\rho\sigma}[\mu\nu, \sigma]$$

Cette connexion est dite *métrique*. Lorsque la connexion diffère de la connexion métrique, la différence $\Theta^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ est appelée *forme de torsion*.

On a également une formule donnant la dérivée covariante d'un champ de covecteurs :

$$\omega_{\nu;\mu} = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\omega_\rho$$

Et on pour un tenseur général, la dérivée covariante ajoute un terme pour chaque indice du tenseur, d'un des deux types précédents selon la nature de cet indice (contravariant ou covariant).

On notera que le fait que la connexion est métrique se traduit exactement par :

$$g_{\nu\sigma;\mu} = \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} = 0$$

La dérivée covariante est linéaire et se comporte vis-à-vis des produits exactement comme une dérivée ordinaire. En revanche, *les dérivées covariantes ne communtent pas*, c'est-à-dire que si ω_μ est un champ de covecteurs,

$$\omega_{\mu;\nu;\rho} - \omega_{\mu;\rho;\nu} = \omega_\lambda R^\lambda_{\mu\nu\rho}$$

où $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$ sont les composantes d'un tenseur appelé *tenseur de Riemann* ou *tenseur de courbure*. Un calcul aisé, que nous enjoignons le lecteur à vérifier, donne :

$$\omega_{\mu;\nu;\rho} = \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\omega_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\tau}\omega_\sigma + \Gamma^\tau_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\tau}\omega_\sigma$$

et

$$\omega_{\mu;\rho;\nu} = \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}\omega_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\tau}\omega_\sigma + \Gamma^\tau_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\tau}\omega_\sigma$$

Lorsqu'on fait la différence, les termes du type $\frac{\partial \omega_\iota}{\partial x^\kappa}$ s'annulent et il reste

$$\omega_{\mu;\nu;\rho} - \omega_{\mu;\rho;\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}\omega_\sigma - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\omega_\sigma + \Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\tau}\omega_\sigma - \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\tau}\omega_\sigma$$

ce qui donne

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\tau}$$

Il est important d'insister sur le fait que la connexion n'est pas un tenseur, et se transforme par un changement de coordonnées de manière non standard, alors que le tenseur de Riemann, du fait de sa définition au moyen des dérivées covariantes, *est* un tenseur, et se transforme de la manière canonique sous l'effet d'un changement de coordonnées. En particulier, comme les matrices jacobiennes sont inversibles, si le tenseur de Riemann est non nul en un point, aucun changement de coordonnées ne pourra le rendre nul : l'existence d'une courbure en un point est une propriété *intrinsèque* de la variété riemannienne, qu'il n'est pas possible d'"escamoter" par un changement de coordonnées. A l'inverse, il est toujours possible, par un changement de coordonnées idoine d'annuler la connexion en un point (coordonnées géodésiques).

Les tenseurs de Ricci, de Weyl et d'Einstein

Bienvenu au zoo !

Nous commençons par citer une identité célèbre, nommée *identité de Bianchi* :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma;\nu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu;\rho} = 0$$

Le *tenseur de Ricci* $R_{\mu\nu}$ est le tenseur obtenu en effectuant une "contraction" sur le tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

Le *scalaire de Ricci* R est obtenu en contractant à son tour le tenseur de Ricci :

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Le *tenseur d'Einstein* $G_{\mu\nu}$ est donné par la formule suivante :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Il joue un rôle tout particulier en Relativité Générale. (En effet, les équations de Bianchi s'écrivent sur le tenseur d'Einstein :

$$G_{\mu\nu;\mu} = 0$$

ce qui fait penser à une équation de conservation : on dispose d'autre part en physique d'un tenseur nommé tenseur de matière, ou tenseur d'impulsion-énergie, $T_{\mu\nu}$; le théorème de Bernoulli affirme que $T_{\mu\nu;\mu} = 0$. Ces deux tenseurs sont liés par l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi\mathcal{G}T_{\mu\nu}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de Newton. Par ailleurs, le scalaire de Ricci joue également un rôle important en physique, puisqu'il s'agit de la densité de Lagrange du champ gravitationnel.)

Deux variétés riemanniennes sont dites *conformes* ss'il existe un difféomorphisme entre elles qui conserve les angles. Comme d'habitude, nous ne nous intéressons qu'au point de vue local : si θ est un difféomorphisme conservant les angles entre deux variétés riemanniennes, que (U, φ) est une carte de la première, alors $(\theta(U), \varphi\theta^{-1})$ est une carte de l'autre. De plus, l'hypothèse "θ conserve les angles" peut se traduire par l'existence en tout point a de U d'un réel, conventionnellement noté e^{2s} (s n'est pas un indice ! il s'agit de l'exponentielle de $2s$) tel que

$$g'_{\mu\nu}(\theta(a)) = e^{2s(a)} g_{\mu\nu}(a)$$

où les coordonnées de la métrique sont prises dans les systèmes de coordonnées (U, φ) (pour g) et (U', φ') (pour g'). On note, abusivement bien sûr :

$$g'_{\mu\nu} = e^{2s} g_{\mu\nu}$$

On peut montrer (cela n'est pas très difficile, mais, comme tous les calculs en géométrie différentielle, c'est assez long) qu'une condition nécessaire pour cela est que :

$$C'^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = C^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$$

où

$$C^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} + \frac{1}{n-2}(\delta^{\lambda}_{\nu} R_{\mu\rho} - \delta^{\lambda}_{\rho} R_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} R^{\lambda}_{\nu} - g_{\mu\nu} R^{\lambda}_{\rho}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\lambda}_{\rho} g_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu} g_{\mu\rho})$$

est un tenseur appelé *tenseur de Weyl*, ou *tenseur de courbure conforme*. Dans cette expression, n est la dimension des variétés ; l'expression ci-dessus n'a de sens que pour $n \geq 3$. En effet, en dimension 1, tout difféomorphisme conserve les angles (d'ailleurs, en dimension 1, tous les espaces sont plats, puisque tous les arcs C^{∞} sont rectifiables), et en dimension 2, on peut montrer que deux nappes riemanniennes quelconques sont toujours conformes. Naturellement, l'expression $C'^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = C^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ écrite plus haut se réfère aux systèmes de coordonnés (U, φ) et $(\theta(U), \varphi\theta^{-1})$. On peut montrer que pour $n = 3$ on a toujours $C^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = 0$. Un espace (une variété riemannienne) est dit *conformément plat* ss'il est localement conforme à un espace euclidien. Une condition nécessaire et suffisante pour cela, en dimension $n \geq 4$ est que $C^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = 0$. En dimension 3, la condition est un peu plus complexe.

Géodésiques

On cherche à rendre stationnaire la longueur d'une courbe entre deux points dans une variété riemannienne, c'est-à-dire à rendre stationnaire l'intégrale :

$$\int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt$$

Pour cela, on utilise l'équation différentielle d'Euler-Lagrange habituelle. Le fait qu'on ait affaire à plusieurs fonctions $x^1, ..., x^n$ au lieu d'une n'est pas un obstacle, il faut simplement éviter de se perdre dans les indices. Il faut également prendre gare au fait que $g_{\mu\nu}$ est une fonction des coordonnées x^ρ. En notant $\Phi = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}$, on a :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2\Phi}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\frac{dx^\rho}{dt}} = \frac{1}{\Phi}g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{dt}$$

(cette seconde égalité illustre bien les écueils de la dérivation des sommations implicites ; le lecteur se persuadera qu'il ne manque pas un 2 au dénominateur !) L'équation différentielle d'Euler-Lagrange, $\frac{\partial\Phi}{\partial x^\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\frac{dx^\rho}{dt}} = 0$ s'écrit alors, après multiplication par Φ :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} - g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{\Phi'}{\Phi}g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{dt} = 0$$

Après un peu de ménage, on trouve :

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{\Phi'}{\Phi}g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{dt} = 0$$

Mais on reconnaît là-dedans un symbole de Christoffel, et on peut donc écrire la condition comme

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + [\mu\nu;\rho]\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{\Phi'}{\Phi}g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{dt} = 0$$

En montant l'indice ρ, on a

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{\Phi'}{\Phi}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

Ce qui s'écrit encore, en introduisant l'arc (ou abscisse curviligne) s, comme $\Phi = \frac{ds}{dt}$:

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} - \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

Si on choisit de paramétrer les courbes par leur abscisse curviligne, la condition de géodésicité est :

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Si la courbe n'est pas une géodésique, en revanche, $\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$ définit un vecteur k^λ, normal à la courbe en tout point (c'est-à-dire en fait normal à $\frac{dx^\rho}{dt}$) : c'est le vecteur normale principale, et le rayon de courbure est donné par :

$$R = \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\rho}k^\lambda k^\rho}}$$

Sous-variétés riemanniennes

Supposons donnée une variété riemannienne M et une sous-variété N de M. On cherche à munir N d'une structure naturelle de variété riemannienne : celle-ci sera évidemment déterminée par l'inclusion $TN \subseteq TM$. Nous allons montrer comment la calculer. Supposons N de dimension k et M de dimension n, soit a un point de N, (U, φ) une carte de M en a telle que $U \cap N = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k)$ (une telle carte existe par définition d'une sous-variété). Alors $(U \cap N, \varphi|_N)$ constitue une carte de N en a, et si $[a, U \cap N, \varphi|_N, x]$ et $[a, U \cap N, \varphi|_N, y]$ sont deux vecteurs tangents à N en a, leur produit scalaire sera donné par

$$g'_{ij} x^i y^j$$

où g'_{ij} est la métrique de N dans le système de coordonnées $(U \cap N, \varphi|_N)$. Mais par définition de cette métrique, ce produit scalaire est le même que celui prit dans M, soit :

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ est la métrique de N. Les indices latins vont de 1 à k et les indices grecs de 1 à k. On a donc

$$g'_{ij} = g_{ij}$$

c'est-à-dire que la métrique de N est obtenue, dans un système de coordonnées choisi pour qu'une partie des coordonnées (les k premières) paramètrent N, en tronquant la métrique de M pour ne garder que les composantes selon les coordonnées qui paramètrent N (les k premières). Il n'est toutefois pas toujours désirable de passer dans un système de coordonnées pour lequel les k premières coordonnées paramètrent N ; plus exactement, on peut ne vouloir préciser que ces k premières coordonnées et non les $n - k$ suivantes qui ne jouent aucun rôle. Ceci n'est pas un problème : en effectuant un changement de coordonnées, on voit que

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}$$

et seule la connaissance des k premières coordonnées du système (y_i) est nécessaire. On notera que cette formule, qui ressemble à une simple formule de changements de coordonnées, *n'est valable que pour la métrique covariante* ; elle ne l'est notamment pas pour la métrique contravariante (d'ailleurs, $\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}$ n'aurait aucun sens) ni pour le tenseur de Riemann (sans quoi tous les sous-espaces d'un espace plats seraient plats, ce qui n'est assurément pas vrai !)

Exemples

1. Les coordonnées polaires du plan. Dans les coordonnées cartésiennes, (x, y), la métrique du plan euclidien est évidemment

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $x^1 = x$ et $x^2 = y$, ce qui s'écrit encore :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

(il est vrai que les notations ne sont pas géniales, vu qu'on ne peut pas distinguer $\mathrm{d}x^2$ comme signifiant $\mathrm{d}y$ et comme signifiant $(\mathrm{d}x)^2 = (\mathrm{d}x^1)^2$... Mais le lecteur intelligent s'y retrouvera tout de même.) On passe aux coordonnées polaires sur l'ouvert constitué du complémentaire de l'origine : ces coordonnées sont (r, θ), définies par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

On posera $y^1 = r$, $y^2 = \theta$ le second système de coordonnées (attention aux notations !) ; on calcule alors la métrique g'_{ij} dans ce nouveau système conformément à la formule générale

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}$$

On a alors

$$g'_{1,1} = \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} g_{1,1} + \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} g_{1,2} + \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} g_{2,1} + \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} g_{2,2} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Pour essayer de limiter les confusions, nous remplacerons les indices numériques par les coordonnées auxquelles ils correspondent. Ainsi $g'_{1,1}$ sera noté g'_{rr} (ou même g_{rr}) et $g_{1,1} = g_{xx}$, $g_{2,2} = g_{yy}$, etc. Et de même, $x^1 = x^x = x$, $x^2 = x^y = y$, $y^1 = y^r = r$ et $y^2 = y^\theta = \theta$. On a donc montré $g'_{rr} = 1$. De même, compte tenu du fait que seuls g_{xx} et g_{yy} sont non nuls :

$$g'_{r\theta} = g'_{\theta r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} g_{yy} = -\cos\theta\,\sin\theta + \sin\theta\,\cos\theta = 0$$

et

$$g'_{\theta\theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} g_{yy} = r^2$$

Par conséquent, la métrique polaire est donnée par :

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$

et la métrique contravariante est bien entendu

$$g'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

Le calcul des symboles de Christoffel est à peu près immédiat ; par exemple :

$$[\theta\theta; r] = [2, 2; 1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\theta r}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g'_{\theta r}}{\partial x^\theta} - \frac{\partial g'_{\theta\theta}}{\partial x^r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = -r$$

Les seuls symboles non nuls sont :

$$[r\theta;\theta] = [\theta r;\theta] = -[\theta\theta;r] = r$$

Et les symboles de Christoffel du second type sont :

$$\left\{ \begin{matrix} \theta \\ r\theta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ \theta\theta \end{matrix} \right\} = -r$$

On vérifie alors sans mal que le tenseur de Riemann est nul : le plan est resté plat lors du passage en coordonnées polaires !

On peut d'ores et déjà voir l'intérêt des dérivées covariantes : soit le champ de vecteurs :

$$p^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est tout simplement le champ radial unitaire sortant. En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$p^\mu = \frac{\partial x^\mu}{y_i} p^i = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

et par conséquent n'est pas constant. La dérivée covariante de p^i ne doit pas être nulle. Ce qui est le cas :

$$p^r_{;r} = \frac{\partial p^r}{\partial x^r} + \Gamma^r_{rk} p^k = 0 + \Gamma^r_{rr} p^r + \Gamma^r_{r\theta} p^\theta = 0$$

$$p^r_{;\theta} = \frac{\partial p^r}{\partial x^\theta} + \Gamma^r_{\theta k} p^k = 0 + \Gamma^r_{\theta r} p^r + \Gamma^r_{\theta\theta} p^\theta = 0$$

$$p^\theta_{;r} = \frac{\partial p^\theta}{\partial x^r} + \Gamma^\theta_{rk} p^k = 0 + \Gamma^\theta_{rr} p^r + \Gamma^\theta_{r\theta} p^\theta = 0$$

$$p^\theta_{;\theta} = \frac{\partial p^\theta}{\partial x^\theta} + \Gamma^\theta_{\theta k} p^k = 0 + \Gamma^\theta_{\theta r} p^r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} p^\theta = \frac{1}{r}$$

2. La sphère. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes dont la métrique est donnée par

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Pour déterminer la métrique de la sphère de rayon R et de centre $(0,0,0)$, on peut soit passer en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) et tronquer la métrique obtenue aux composantes selon θ et ϕ, soit utiliser directement la formule vue plus haut pour calculer la métrique g'_{ij} de la sphère. C'est ce que nous allons faire. Il faut tout d'abord la paramétrer. Pour changer des traditionnelles coordonnées polaires, on utilisera la latitude α et la longitude β : celles-ci réalisent un difféomorphisme entre la sphère privée d'un demi-méridien et un rectangle ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\beta \in]-\pi;\pi[$. Les coordonnées du point de latitude α et de longitude β sont :

$$(\mathrm{R}\cos\alpha\cos\beta, \mathrm{R}\cos\alpha\sin\beta, \mathrm{R}\sin\alpha)$$

On peut alors calculer la métrique : sachant que seuls g_{xx}, g_{yy}, g_{zz} sont non nuls, on trouve :

$$g'_{\alpha\alpha} = g'_{11} = \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\alpha} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\alpha} g_{yy} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\alpha} g_{zz} = (-\mathrm{R}\sin\alpha\cos\beta)^2 + (-\mathrm{R}\sin\alpha\sin\beta)^2 + (\mathrm{R}\cos\alpha)^2 = \mathrm{R}^2$$

$$g'_{\alpha\beta} = g'_{12} = \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} g_{yy} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} g_{zz} = 0$$

$$g'_{\beta\beta} = g'_{22} = \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta}g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta}g_{yy} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta}g_{zz} = \mathrm{R}^2 \cos^2\alpha$$

et la métrique est donc :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{R}^2(\mathrm{d}\alpha^2 + \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\beta^2)$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont alors

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\beta} \right\} = \cos\alpha\,\sin\alpha$$

$$\left\{ {\beta \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\beta \atop \beta\alpha} \right\} = -\tan\alpha$$

L'expression générale du tenseur de Riemann

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial\left\{ {\lambda \atop \mu\rho} \right\}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}}{\partial x^{\rho}} + \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\}\left\{ {\lambda \atop \nu\sigma} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\}\left\{ {\lambda \atop \rho\sigma} \right\}$$

donne alors

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta\alpha\beta} &= \frac{\partial\left\{ {\alpha \atop \beta\beta} \right\}}{\partial \alpha} - \frac{\partial\left\{ {\alpha \atop \beta\alpha} \right\}}{\partial \beta} + \left\{ {\alpha \atop \beta\beta} \right\}\left\{ {\alpha \atop \alpha\alpha} \right\} + \left\{ {\beta \atop \beta\beta} \right\}\left\{ {\alpha \atop \alpha\beta} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \beta\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \beta\alpha} \right\} - \left\{ {\beta \atop \beta\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \beta\beta} \right\} \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \end{aligned}$$

Et toutes les composantes non nulles du tenseur de Riemann sont données par :

$$R^{\alpha}_{\beta\alpha\beta} = -R^{\alpha}_{\beta\beta\alpha} = \cos^2\alpha$$

$$R^{\beta}_{\alpha\beta\alpha} = -R^{\beta}_{\alpha\alpha\beta} = 1$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont donc

$$R_{\alpha\alpha} = R^{\alpha}_{\alpha\alpha\alpha} + R^{\beta}_{\alpha\alpha\beta} = -1$$

$$R_{\beta\beta} = R^{\alpha}_{\beta\beta\alpha} + R^{\beta}_{\beta\beta\beta} = -\cos^2\alpha$$

Par conséquent, $R^{\alpha}_{\alpha} = R^{\beta}_{\beta} = -\mathrm{R}^{-2}$ donc $R = -2\mathrm{R}^{-2}$. Ceci vaut encore $-2K$ où K est la courbure gaussienne de la sphère (la courbure gaussienne d'une nappe riemannienne est le produit, lorsque cette nappe est plongée dans un espace euclidien de dimension 3, des courbures maximale et minimale, ici toutes deux égales à R^{-1}). Ceci est une propriété générale des nappes riemanniennes : dans tous les cas, $R = -2K$. Le tenseur de Weyl n'a bien entendu pas de sens en dimension 2, et le tenseur d'Einstein y est toujours nul (c'est-à-dire $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$).

3. Ellipsoïde de révolution.

Il s'agit encore une fois d'une nappe plongée dans $\mathbb{R}^3$. Si le rayon équatorial est R et le rayon polaire r, les coordonnées cartésiennes du point de latitude α et de longitude β sont données par :

$$(\mathrm{R}\cos\alpha\,\cos\beta, \mathrm{R}\cos\alpha\,\sin\beta, \mathrm{r}\,\sin\alpha)$$

Les calculs habituels donnent la métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{R}^2\sin^2\alpha + \mathrm{r}^2\cos^2\alpha)\,\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{R}^2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\beta^2$$

Les symboles de Christoffel non nuls sont donnés par :

$$\left\{ {\alpha \atop \alpha\alpha} \right\} = \frac{(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2)\,\sin\alpha\,\cos\alpha}{\mathrm{R}^2\,\sin^2\alpha + \mathrm{r}^2\,\cos^2\alpha}$$

$$\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\beta\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\} = -\tan\alpha$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\beta\end{matrix}\right\} = \frac{\mathrm{R}^2 \sin\alpha\, \cos\alpha}{\mathrm{R}^2 \sin^2\alpha + \mathrm{r}^2 \cos^2\alpha}$$

Les composantes non nulles des tenseurs de Riemann et de Ricci :

$$R^{\alpha}_{\beta\alpha\beta} = -R^{\alpha}_{\beta\beta\alpha} = -R_{\beta\beta} = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{r}^2 \cos^2\alpha}{(\mathrm{R}^2 \sin^2\alpha + \mathrm{r}^2 \cos^2\alpha)^2}$$

$$R^{\beta}_{\alpha\beta\alpha} = -R^{\beta}_{\alpha\alpha\beta} = -R_{\alpha\alpha} = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}^2 \sin^2\alpha + \mathrm{r}^2 \cos^2\alpha}$$

Le scalaire de Ricci est $R = -2K$ où

$$K = \frac{\mathrm{r}^2}{(\mathrm{R}^2 \sin^2\alpha + \mathrm{r}^2 \cos^2\alpha)^2}$$

est la courbure gaussienne. On rappelle que les rayons de courbure aux sommets d'une ellipse de demi-axes a et b, $a < b$, sont $\frac{a^2}{b}$ (aux sommets du petit axe) et $\frac{b^2}{a}$ (aux sommets du grand axe). Au pôle nord de l'ellipsoïde, tous les rayons de courbure sont donc égaux à $\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}}$ et la courbure gaussienne est donc $\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}^4}$, ce qui coïncide avec ce que donne la formule plus haut pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (bien que théoriquement les calculs n'aient été valables que pour $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$). A l'équateur, un rayon de courbure principal est évidemment égal à R (rayon de courbure de l'équateur) et l'autre est égal à $\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}}$ (rayon de courbure du méridien), ce qui donne pour la courbure gaussienne $K = \mathrm{r}^{-2}$, ce qui est confirmé par la formule obtenue plus haut, pour $\alpha = 0$.

Intégration

Les formules bien connues de changements de variables dans les intégrales multiples expriment le fait que

$$dy^1 \cdots dy^n = (\det J^*)\, dx^1 \cdots dx^n$$

où J^* est la matrice jacobienne inverse, introduite précédemment. (Ceci est une écriture abusive pour dire : si f est une fonction localement intégrable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, K un compact de Ω et θ un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^n$, alors $\int_{\theta(K)} f \circ \theta^{-1} = \int_K \det(D\theta)\, f = \int_K \det(D_x\theta)\, f(x)\, dx$, où $D_x\theta$ désigne la différentielle de θ en x.)

Si $y^1, \ldots, y^n$ et $x^1, \ldots, x^n$ représentent deux systèmes de coordonnées sur un même ouvert d'une variété riemannienne, en notant $J^{\mu}_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}$ la matrice jacobienne, et g'_{ij} et $g_{\mu\nu}$ les métriques respectives, on sait que $g'_{ij} = J^{\mu}_i J^{\nu}_j g_{\mu\nu}$, donc $\sqrt{\det g'} = \det J \sqrt{\det g}$. Par conséquent,

$$\sqrt{\det g'}\, dy^1 \cdots dy^n = \sqrt{\det g}\, dx^1 \cdots dx^n$$

On définit donc (canoniquement) une mesure dm sur une variété riemannienne par

$$dm = \sqrt{\det g}\, dx^1 \cdots dx^n$$

dans un système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ quelconque : cette mesure ne dépend pas du système de coordonnées. La racine carrée du déterminant de la métrique, $\sqrt{\det g}$, s'appelle *l'élément de volume* de la variété riemannienne.

Pour résumer, intégrer une fonction scalaire f sur le domaine U d'une carte (U, φ) d'une variété riemannienne revient à faire

$$\int_{\varphi(U)} \sqrt{\det g}\, (f \circ \varphi^{-1})$$

où g est la matrice représentant la métrique dans le système de coordonnées (U, φ). L'existence de cette intégrale, et, le cas échéant, sa valeur, ne dépendent pas du système de coordonnées choisi (pour le même domaine). Naturellement, on pourra se réduire à des fonctions définies sur des domaines de cartes en utilisant l'additivité dénombrable de l'intégrale.

Comme échantillon d'utilisation, citons le résultat suivant, dû à K. F. Gauss : l'intégrale de la courbure gaussienne d'une nappe compacte est un invariant topologique (c'est-à-dire, a la même valeur pour deux variétés homéomorphes). Cette valeur est $2\pi\chi$ où χ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré*, qui est toujours un entier, et qui vaut $2(1-g)$ pour une nappe orientable compacte connexe, où g est le *genre* de la nappe (0 pour une sphère, 1 pour un tore, 2 pour un pretzel, etc.)

On peut par exemple calculer la surface de la sphère : avec le système de coordonnées (α, β) introduit plus haut, on a $\sqrt{g} = \mathrm{R}^2 \cos\alpha$ (car $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Par conséquent, l'aire de la sphère est :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{R}^2 \cos\alpha \, d\alpha \, d\beta = 2\pi\mathrm{R}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha = 4\pi\mathrm{R}^2$$

(On a utilisé le fait que le système de coordonnées recouvre presque toute la sphère.)

Enfin, on peut noter que la définition de la mesure que nous venons de faire permet de retrouver les prescriptions faites sur la longueur d'un arc paramétré dans une variété riemannienne : celui-ci s'assimile en effet à une sous-variété paramétrée par la coordonnée t et de métrique

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

On en déduira également sans difficulté les formules donnant l'aire d'une nappe, le volume d'une sous-variété de dimension 3, etc.

Applications à la Relativité Générale

Selon la théorie de la Relativité Générale, l'espace-temps est une variété C^∞ de dimension 4, paracompacte, parfaitement séparable, et pseudo-riemannienne $(3,1)$. Ceci signifie que la métrique n'est plus positive définie mais a pour signature $(3,1)$ en tout point. Ceci impose quelques changements évidents dans les formules (par exemple, $\sqrt{-g}$ au lieu de $\sqrt{g}$), nous n'insistons pas.

Le principe d'inertie devient en relativité générale : en l'absence de forces extérieures (à l'exception des forces gravitationnelles), les particules ponctuelles suivent des géodésiques.

Le tenseur d'Einstein prend toute son importance en relativité. Par exemple, les équations d'Einstein dans le vide sont données par :

$$G_{\mu\nu} = 0$$

La solution la plus célèbre de ces équations est la *solution de Scharzschild*, donnée en coordonnées sphériques (t, r, θ, φ) par :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2$$

Celle-ci décrit l'espace-temps autour d'une distribution de masse M à symétrie sphérique, de masse totale M. La coordonnée t est le temps tel qu'il est mesuré par un observateur asymptotique. La coordonnée r est la distance au centre, définie par l'aire d'une sphère concentrique à la distribution de masse. Les coordonnées θ et φ sont les angles des coordonnées sphériques. Il est évident qu'on travaille dans des unités où $\mathcal{G} = c = 1$ ($\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation et c la vitesse de la lumière). Enfin, le domaine de coordonnées est l'espace privé d'une boule fermée concentrique à la distribution, et de rayon $\geq 2M$ pour éviter les problèmes en $r = 2M$ (cette dernière hypersurface, appelée *horizon des événements*, définit la frontière d'un trou noir). Nous nous proposons d'étudier les orbites circulaires équatoriales (r constant, $\theta = \frac{\pi}{2}$) autour de la distribution de masse, et de montrer la troisième loi de Kepler dans le cas d'une telle orbite. Pour cela, il faut calculer certains symboles de Christoffel :

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = (2M - r)\sin^2\theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = -\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ tt \end{Bmatrix} = \frac{M(r-2M)}{r^3}$$

Une orbite comme nous le proposons, paramétrée par σ, prend la forme :

$$x^\mu = \begin{pmatrix} \sigma \\ r \\ \pi/2 \\ \omega\sigma \end{pmatrix}$$

(en mettant le temps en premier). On a alors

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Ce qui donne l'abscisse curviligne $ds^2 = r^2\omega^2 + (\frac{2M}{r} - 1)\, d\sigma^2$ Ceci n'a pas beaucoup de sens, car si on va plus lentement que la lumière ds^2 est négatif : la ligne d'univers d'une particule physique n'a pas de longueur (ou a une longueur imaginaire). On utilise donc plutôt le *temps propre* τ donné par $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma}\, d\sigma^2$, soit ici :

$$d\tau^2 = \left(1 - r^2\omega^2 - \frac{2M}{r}\right) d\sigma^2$$

On reconnaît ici deux facteurs de dilations de temps : le terme de la relativité restreinte $r^2\omega^2$ et le terme de la relativité générale $\frac{2M}{r}$ (appelé aussi redshift gravitationnel). La valeur de ω correspondant à la vitesse de la lumière est donné par $d\tau^2 = 0$ soit $\omega_c^2 = \frac{r-2M}{r^3}$ et pour une particule massive $|\omega| < |\omega_c|$.

Par ailleurs, pour déterminer la vitesse d'orbite, on cherche à quelle condition notre courbe est une géodésique. Comme σ est égal à τ à une simple constante près, i.e. $\frac{d^2\sigma}{d^2\tau} = 0$ (paramètre *affine*), l'équation de géodésicité s'écrit

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$$

Comme ici $\theta = \frac{\pi}{2}$, la seule équation non triviale dans tout ceci est :

$$(2M - r)\omega^2 + \frac{M(r-2M)}{r^3} = 0$$

Ceci s'écrit encore

$$\omega^2 = \frac{M}{r^3}$$

C'est la troisième loi de Kepler.

On peut par ailleurs remarquer que pour ω correspondant à une géodésique, on a :

$$d\tau^2 = 1 - \frac{3M}{r}$$

En particulier, ceci n'est positif que pour $r > 3M$. On dit que $r = 3M$ est la *dernière orbite stable* : au-delà de cette limite, les orbites circulaires correspondraient à des vitesses supérieures à celle de la lumière, ce qui est impossible. En revanche, pour un observateur au repos,

$$d\tau^2 = -g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r}$$

Ce qui signifie qu'il est possible de se maintenir au repos tant que $r > 2M$.

Nous nous proposons à présent de vérifier l'existence de l'avance du périhélie, et de calculer sa valeur (cf. épreuve de physique de la session 1994 du Concours Général pour une approche beaucoup plus terre-à-terre). Pour cela, nous allons effectuer une petite perturbation sur l'orbite circulaire (orbite elliptique) tout en lui imposant de rester une géodésique. On écrit donc

$$x^\rho = \begin{pmatrix} \sigma + \delta(\sigma) \\ r_0 + \varepsilon(\sigma) \\ \pi/2 \\ \omega\sigma + \eta(\sigma) \end{pmatrix}$$

avec $\delta, \varepsilon, \eta$ et leur dérivées suffisamment petites pour que les approximations qui suivent soient valables (nous laissons le soin au lecteur de formuler les critères idoines). On supposera de plus que ces fonctions sont périodiques (donc bornées), que $\omega^2 = \frac{M}{r_0^3}$ (c'est la valeur non perturbée), et que le paramètre σ est un paramètre affine, i.e. que $\left|\frac{dx^\mu}{d\sigma}\right|$ est constant, ce qui permet d'exprimer l'équation des géodésiques comme $\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$ On a alors

$$\frac{dx^\rho}{d\sigma} = \begin{pmatrix} 1 + \delta'(\sigma) \\ \varepsilon'(\sigma) \\ 0 \\ \omega + \eta'(\sigma) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} = \begin{pmatrix} \delta''(\sigma) \\ \varepsilon''(\sigma) \\ 0 \\ \eta''(\sigma) \end{pmatrix}$$

On va maintenant exprimer les termes du type $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$:

$$\left\{ {t \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 2\left\{ {t \atop tr} \right\} \frac{dt}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma} \simeq \frac{2M}{r_0(r_0-2M)}\varepsilon'(\sigma)$$

(noter qu'on ne développe $\left\{ {t \atop tr} \right\} = \frac{2M}{r(r-2M)}$ qu'à l'ordre 0 car $\varepsilon'(\sigma)$ est déjà d'ordre 1).

$$\left\{ {\varphi \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 2\left\{ {\varphi \atop \varphi r} \right\} \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma} \simeq \frac{2\omega}{r_0}\varepsilon'(\sigma)$$

Enfin,

$$\left\{ {r \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = \left\{ {r \atop rr} \right\} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \left\{ {r \atop \varphi\varphi} \right\} \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 + \left\{ {r \atop tt} \right\} \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2$$

Le premier terme est négligeable devant les deux autres et on l'omet donc. En ce qui concerne les symboles de Christoffel, on a :

$$\left\{ {r \atop \varphi\varphi} \right\} = 2M - r \simeq 2M - r_0 - \varepsilon(\sigma)$$

$$\left\{ {r \atop tt} \right\} = \frac{M(r-2M)}{r^3} \simeq \frac{M(r_0-2M)}{r_0^3} - \frac{2M(r_0-3M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma)$$

Par suite, $\left\{ {r \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$ vaut :

$$-(r_0-2M)\omega^2 - \omega^2\varepsilon(\sigma) - 2(r_0-2M)\omega\eta'(\sigma) + \frac{M(r_0-2M)}{r_0^3} - \frac{2M(r_0-3M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) + \frac{2M(r_0-2M)}{r_0^3}\delta'(\sigma)$$

On cesse à présent d'écrire $\simeq$... Les équations des géodésiques se traduisent : sur t,

$$\delta''(\sigma) + \frac{2M}{r_0(r_0-2M)}\varepsilon'(\sigma) = 0$$

sur φ,

$$\eta''(\sigma) + \frac{2\omega}{r_0}\varepsilon'(\sigma) = 0$$

et sur r,

$$\varepsilon''(\sigma) - (r_0 - 2M)\omega^2 - \omega^2\varepsilon(\sigma) - 2(r_0 - 2M)\omega\eta'(\sigma) + \frac{M(r_0 - 2M)}{r_0^3} - \frac{2M(r_0 - 3M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) + \frac{2M(r_0 - 2M)}{r_0^3}\delta'(\sigma) = 0$$

soit, comme $\omega^2 = \frac{M}{r_0^3}$,

$$\varepsilon''(\sigma) - \frac{M}{r_0^3}\varepsilon(\sigma) - 2(r_0 - 2M)\omega\eta'(\sigma) - \frac{2M(r_0 - 3M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) + \frac{2M(r_0 - 2M)}{r_0^3}\delta'(\sigma) = 0$$

L'équation $\delta''(\sigma) + \frac{2M}{r_0(r_0-2M)}\varepsilon'(\sigma) = 0$ a une solution de la forme $\delta'(\sigma) = -\frac{2M}{r_0(r_0-2M)}\varepsilon(\sigma) + K$ où K est une constante. Mais, par périodicité de δ, celle-ci doit être nulle. Donc

$$\delta'(\sigma) = -\frac{2M}{r_0(r_0 - 2M)}\varepsilon(\sigma)$$

et de même,

$$\eta'(\sigma) = -\frac{2\omega}{r_0}\varepsilon(\sigma)$$

En remplaçant dans l'équation en ε, on trouve :

$$\varepsilon''(\sigma) - \frac{M}{r_0^3}\varepsilon(\sigma) + \frac{4(r_0 - 2M)}{r_0}\omega^2\varepsilon(\sigma) - \frac{2M(r_0 - 3M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) - \frac{4M^2}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) = 0$$

Soit, après simplification

$$\varepsilon''(\sigma) + \frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^4}\varepsilon(\sigma) = 0$$

On a donc montré que (du moins pour $r_0 \gg 6M$, ce qui est nécessaire pour que nos méthodes perturbatives puissent fonctionner) les perturbations $\delta, \varepsilon, \eta$ sont périodiques de période

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^4}}$$

$\frac{2\pi}{\hat{\omega}}$ est donc l'intervalle de temps (en σ pour être précis, mais en t c'est pour ainsi dire pareil) séparant deux passages de la particule au périastre. Pendant ce temps, elle a effectué $\frac{2\pi\omega}{\hat{\omega}}$ radians, soit un tour complet et $2\pi\left(\frac{\omega}{\hat{\omega}} - 1\right)$ radians. La vitesse de la précession du périhélie est donc

$$\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega} = \sqrt{\frac{M}{r_0^3}} - \sqrt{\frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^4}}$$

$\tilde{\omega} \geq 0$: il y a bien précession. Pour r_0 grand devant M,

$$\tilde{\omega} = \frac{3M^{3/2}}{r_0^{5/2}}$$

soit avec les facteurs $\mathcal{G}$ et c (qui se trouvent par une simple analyse dimensionnelle) :

$$\tilde{\omega} = \frac{3\mathcal{G}^{3/2}M^{3/2}}{r_0^{5/2}c^2}$$

L'exemple canonique est celui de la planète Mercure pour laquelle on a $M = M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $r_0 = 5.81 \times 10^{10}\,\mathrm{m}$, et naturellement $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. On trouve $\tilde{\omega} = 6.3 \times 10^{-14}\,\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 41''/\mathrm{JC}$ (JC désignant le siècle julien). La valeur classique est $43''/\mathrm{JC}$. Il est amusant de noter que la correction relativiste ne contribue qu'à une très faible partie de l'avance du périhélie de Mercure, laquelle vaut, selon Le Verrier & Gaillot, $5592.49''/\mathrm{JC}$.

Relativité générale, suite : trou noir en rotation

Alors que la métrique de Schwarzschild décrit correctement l'extérieur de tout système statique à symétrie sphérique, qu'il soit condensé (trou noir) ou non, aucune solution exacte des équations d'Einstein n'est connue qui décrive une masse non condensée en rotation. En revanche, la métrique de Kerr décrit un trou noir en rotation, et nous allons passer en revue quelques unes de ses caractéristiques.

Le système de coordonnées (dit de Boyer-Lindquist) est (t, r, θ, φ). Si M est la masse du trou noir, et $a = \frac{S}{M}$ son moment cinétique par unité de masse, on pose

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

La métrique est alors donnée par

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)\,\mathrm{d}\varphi - a\,\mathrm{d}t)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2$$

Ce qui s'écrit encore, sous forme matricielle :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (a^2\sin^2\theta - \Delta)/\rho^2 & 0 & 0 & -2Mra(\sin^2\theta/\rho^2) \\ 0 & \rho^2/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -2Mra(\sin^2\theta/\rho^2) & 0 & 0 & (\sin^2\theta/\rho^2)((r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta) \end{pmatrix}$$