Nous rappelons le résultat suivant, dont nous ferons constamment usage : si X est un schéma et $Y = \operatorname{Spec} B$ est un schéma *affine*, alors les morphismes de schémas $X \to Y$ et les morphismes d'anneaux $B \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sont "la même chose" (EGA, I.2.2.4).

Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme de schémas, nous noterons également f l'application continue sur les espaces sous-jacents, et $f^\natural\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ le f-morphisme correspondant sur les faisceaux structuraux.

Si X est un schéma, nous poserons $X_{\text{aff}} = \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$: c'est un schéma affine, et l'application identitité $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ induit un morphisme canonique de schémas $\eta\colon X \to X_{\text{aff}}$. Celui-ci vérifie la propriété universelle suivante : si $X \to Y$ est un morphisme de schémas, avec Y affine, alors il existe un unique morphisme $X_{\text{aff}} \to Y$ qui rend commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_{\text{aff}} \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

De plus, la correspondance $X \mapsto X_{\text{aff}}$ est un foncteur covariant (à un morphisme $\varphi\colon X \to Y$ correspond le morphisme $\varphi_{\text{aff}} = \operatorname{Spec} \Gamma(\varphi)\colon X_{\text{aff}} \to Y_{\text{aff}}$). D'ailleurs, c'est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des schémas affines vers la catégorie des schémas, et le morphisme naturel $\eta\colon X \to X_{\text{aff}}$ n'est autre que l'unité de cette adjonction.

En général, l'application canonique $\eta\colon X \to X_{\text{aff}}$ est peu agréable. L'exemple de $X = \mathbb{P}^n_k$, auquel cas $X_{\text{aff}} = \operatorname{Spec} k$, montre que η n'est pas nécessairement injectif. Et si V est un ouvert, même principal, de X_{aff}, il n'est pas toujours vrai que $\eta^\natural_V\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}}) \to \Gamma(\eta^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ soit un isomorphisme. Pour un contre-exemple, prendre X une somme dénombrable (EGA, I.3.1) de copies de $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$, auquel cas X_{aff} s'identifie à $\operatorname{Spec} \prod_{i \in \mathbb{N}} k[T]$, et pour V, prendre l'ouvert affine principal de X_{aff} défini par $(T, T, T, \ldots)$. Son image réciproque $\eta^{-1}(V)$ dans X est alors la somme disjointe des $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$. De cette façon, $\Gamma(\eta^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ est égal à $(k[T, T^{-1}])^{\mathbb{N}}$, alors que $\Gamma(V, \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}})$ est le localisé de $k[T]^{\mathbb{N}}$ en $(T, T, T, \ldots)$, qui est plus petit (on ne peut avoir qu'une puissance bornée de T au dénominateur).

En revanche, si $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et en notant $D'(f)$ l'ouvert de X formé des points $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ (c'est-à-dire $f_x \notin \mathfrak{m}_x$), on sait que $D'(f) = \eta^{-1}(D(f))$ (EGA, I.2.2.4.1). De plus, l'application

$$\eta^\natural_{D(f)}\colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f = \Gamma(D(f), \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}}) \to \Gamma(D'(f), \mathcal{O}_X)$$

est *injective*. En effet, $\Gamma(D'(f), \mathcal{O}_X)$ est la limite projective des $\Gamma(D(f) \cap U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_f$ pour U ouvert affine de X, et si (A_i) est un système projectif d'anneaux de limite A, alors l'application canonique de A_f dans la limite projective des $((A_i)_f)$ est injective. On en déduit immédiatement que pour tout ouvert V de X_{aff} le morphisme $\eta^\natural_V\colon \Gamma(\eta^{-1}(V), \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}}) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ est injectif. Dans le cas où X est quasi-compact, l'application $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}}) \to \Gamma(D'(f), \mathcal{O}_X)$ est non seulement injective mais même bijective, i.e. est un isomorphisme (cela résulte du fait que les limites projectives finies commutent aux localisations), et il en va donc de même de $\eta^\natural_V$ (remarquons que pour montrer la surjectivité de $\eta^\natural_V$, on utilise son injectivité qui est déjà connue). Pour résumer, disons que le morphisme $\eta^\natural\colon \mathcal{O}_{X_{\text{aff}}} \to \eta_* \mathcal{O}_X$ est un monomorphisme en général et est un isomorphisme quand X est quasi-compact.

Enfin, il est facile de voir que si X est quasi-compact ou simplement recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, alors $\eta\colon X \to X_{\mathrm{aff}}$ est dominant. En effet, pour cela, il suffit de voir que son image rencontre chaque $D(f)$ pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ non nilpotent. Or dans ces circonstances, avec les notations précédentes, $\eta^{-1}(D(f)) = D'(f)$ et il s'agit donc de montrer que $D'(f)$ est non vide. Mais si $D'(f)$ est vide, alors son intersection avec tout ouvert affine l'est aussi, donc la restriction de f à tout ouvert affine est nilpotente ; mais puisque X est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, f est nilpotent.

Ainsi, intuitivement, X_{aff} a moins d'ouverts que X, et sur chaque ouvert a moins de sections, mais en a autant si X est quasi-compact. En revanche, on ne peut pas dire grand-chose au niveau des anneaux locaux : il est évident que $\eta_x^\natural\colon \mathcal{O}_{X_{\mathrm{aff}},\eta(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas surjectif en général même quand X est quasi-compact (l'exemple de $X = \mathbb{P}_k^n$ le montre), et je ne pense pas non plus qu'il soit toujours injectif.

Ayant étudié le morphisme η dans le cas d'un schéma quelconque, nous passons maintenant à son étude dans le cas d'un ouvert d'un schéma affine, et plus particulièrement dans le cas d'un ouvert quasi-compact d'un schéma affine (c'est-à-dire dans le cas d'un schéma quasi-affine). Supposons donc que $X = \operatorname{Spec} A$ soit *affine*, auquel cas bien sûr $X_{\mathrm{aff}} = X$, et soit $\iota\colon U \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert de X. Alors on a des morphismes de schémas

$$U \xrightarrow{\eta} U_{\mathrm{aff}} \xrightarrow{\psi} X = X_{\mathrm{aff}}$$

où $\psi = \iota_{\mathrm{aff}}$, dont la composée est l'immersion canonique $\iota\colon U \hookrightarrow X$ (pour le voir, il suffit de regarder les applications correspondantes sur les anneaux de sections globales et d'appliquer le résultat cité au début). On en déduit en particulier que l'application $\eta\colon U \to U_{\mathrm{aff}}$ est injective et même est un *monomorphisme* de schémas (ce qui, on l'a vu, n'est pas vrai en général).

De plus, si V est un ouvert affine de X qui contient U, alors le morphisme composé écrit ci-dessus se factorise encore par l'immersion canonique de V dans X, en $U \to U_{\mathrm{aff}} \to V \hookrightarrow X$ (regarder les morphismes correspondants sur les anneaux de sections globales), ce qui montre que l'image de U_{aff} dans X par ψ est contenue dans tout ouvert affine contenant U.

D'autre part, si V est un ouvert de U, on a $\eta^{-1}(\psi^{-1}(V)) = V$, et la composée

$$\mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\psi_V^\natural} \mathcal{O}_{U_{\mathrm{aff}}}(\psi^{-1}(V)) \xrightarrow{\eta^\natural_{\psi^{-1}(V)}} \mathcal{O}_U(V)$$

est l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U(V)$; on en déduit que $\eta^\natural_{\psi^{-1}(V)}$ et $\psi_V^\natural$ sont tous deux des isomorphismes, puisqu'ils sont déjà injectifs (remarquons qu'on n'a pas fait d'hypothèse de quasi-compacité sur U).

Par ailleurs, pour tout point $x \in U$, les ouverts de la forme $\eta^{-1}(V)$ avec V ouvert de U_{aff} contenant $\eta(x)$ forment un système fondamental de voisinages de x ; en effet, les $\iota^{-1}(V) = V \cap U$ avec V ouvert de X contenant $x = \iota(x)$ forment trivialement un système fondamental de voisinages de x, et les voisinages mentionnés ci-dessus en sont des cas particuliers. Il s'ensuit immédiatement que dans le diagramme

$$\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\psi^\natural_{\eta(x)}} \mathcal{O}_{U_{\mathrm{aff}},x} \xrightarrow{\eta_x^\natural} \mathcal{O}_{U,x}$$

les deux flèches sont des isomorphismes, la composée étant l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U,x}$. En particulier, le morphisme η est *plat*, et le morphisme ψ l'est en tout point de l'image de η. Mais on a même mieux : η est un isomorphisme local. En effet, si $x \in U$, on peut trouver un ouvert affine principal $D(f)$ avec $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $x \in D(f) \subseteq U$. Appelant g la restriction de f à U, qui peut être également considérée comme une section globale sur U_{aff}, de sorte que $D(g)$ est un ouvert affine principal de U_{aff}, on a également $\eta^{-1}(D(g)) = D(f)$ (nous avons déjà vu ceci) et $\psi^{-1}(D(f)) = D(g)$ (tout simplement car ψ est le morphisme de schémas affines correspondant au morphisme d'anneaux $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, qui envoie f sur g). Appliquant le résultat du paragraphe précédent, on voit que ψ est un isomorphisme entre les schémas affines $D(f) \subseteq U$ et $D(g) \subseteq U_{\text{aff}}$. De même, ψ est un isomorphisme local en tout point de l'image de η. Comme η est, on l'a déjà vu, un monomorphisme, c'est une immersion ouverte. On a donc déjà prouvé le résultat intéressant suivant : un schéma U est un sous-schéma ouvert d'un schéma affine si et seulement si $\eta: U \to U_{\text{aff}}$ est une immersion ouverte (la partie "si" est triviale, et nous avons prouvé la partie "seulement si").

La situation est maintenant la suivante : $\eta: U \to U_{\text{aff}}$ est une immersion ouverte ; de plus la restriction de ψ à l'image de η est un isomorphisme de celle-ci sur U. On identifiera donc U à un sous-schéma ouvert de U_{aff}, et il est dense puisque η est dominant, comme on l'a vu plus haut. On a vu que ψ restreint à U est une immersion ouverte ; beaucoup plus mystérieux est son comportement sur le reste de U_{aff}. On sait cependant que l'image de ψ est contenue dans tout ouvert affine de X contenant U.

Il n'est pas vrai en général que ψ soit une immersion ouverte. Par exemple, si $Y = \operatorname{Spec} B$ où $B = k[t_1, t_2]$ et A est le sous anneau de B formé des polynômes $f \in k[t_1, t_2]$ tels que $f(0,0) = f(1,0)$, et $X = \operatorname{Spec} A$ et $U = Y \setminus \{(0,0), (0,1)\}$, qui s'identifie à un ouvert de X. On a alors $Y = U_{\text{aff}}$, et $\psi: Y \to X$ est le morphisme correspondant à l'inclusion $A \to B$. Il se trouve dans ce cas que ψ, sans être une immersion ouverte, est néanmoins un morphisme ouvert ; on peut se demander si c'est le cas en général (je ne connais pas la réponse à cette question).

Supposons à présent que l'application $\psi: U_{\text{aff}} \to X$ soit une *immersion ouverte* ; alors U_{aff} peut être identifié à un sous-schéma ouvert de X, qui contient U. Or on a vu que U_{aff} est contenu dans tout ouvert affine contenant U : ceci montre que U_{aff} est le *plus petit* ouvert affine de X contenant U.

Si $X = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine tel que pour tout ouvert U de X le morphisme $\psi: U_{\text{aff}} \to X$ image de l'immersion canonique $U \hookrightarrow X$ par le foncteur $\cdot_{\text{aff}}$ soit une immersion ouverte (qui est alors, on l'a vu l'immersion canonique du plus petit ouvert affine contenant U), on dira que le schéma affine X est <u>placide</u>. Il est alors clair que tout sous-schéma ouvert affine de X est également placide.

Si X est un schéma quelconque (pas nécessairement affine), les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est (isomorphe à) un sous-schéma ouvert d'un schéma affine placide.

(ii) $X \to X_{\text{aff}}$ est une immersion ouverte et X_{aff} est placide.

En effet, (i)$\Longrightarrow$(ii) résulte de la définition d'un schéma placide et du fait que tout sous-schéma ouvert affine d'un schéma placide est également placide et (ii)$\Longrightarrow$(i) est triviale. Lorsque ces deux conditions équivalentes sont vérifiées, on dira que X est placide.

Quelques questions encore à résoudre. 1) Dans le cas général, le morphisme $\eta\colon X \to X_{\mathrm{aff}}$ est-il toujours injectif sur les fibres (i.e. $\eta_x^\natural\colon \mathcal{O}_{X_{\mathrm{aff}},\eta(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est-il toujours injectif) ? 2) Si X est un schéma affine et U un ouvert de X, le morphisme $\psi\colon U_{\mathrm{aff}} \to X$ est-il toujours ouvert ? Est-il même un isomorphisme local ? 3) Si X est un schéma affine et U un ouvert de X, existe-t-il toujours un plus petit ouvert affine contenant U ? 4) Si X est un schéma affine recouvert par un nombre fini d'ouverts affines placides, X est-il placide ?