Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Neuvième semaine (calculs dans un anneau, dérivées)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Inverses à gauche et à droite. *Soit A un anneau, et $x \in A$. On appelle inverse à gauche de x un élément $y \in A$ tel que $yx = 1$. Montrer que*

1) Si x admet un unique inverse à gauche, alors x est inversible.

2) Si x admet au moins deux inverses à gauche, alors il en admet une infinité.

Encore des inverses. *Soit A un anneau, et $a, b \in A$. Montrer que $1 - ab$ est inversible dans A si et seulement si $1 - ba$ l'est.*

Un exemple classique. *On considère la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe C^∞ et que toutes ses dérivées s'annulent en 0.*

Un autre exemple classique. *On considère la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue. Montrer par un exemple semblable que pour n'importe quel k une fonction peut admettre en tout point un développement limité en $O(x^k)$ sans pour autant être de classe C^1. Plus difficile : (en s'inspirant de l'exercice précédent) montrer qu'une fonction peut admettre en tout point des développements limités à tous les ordres sans pour autant être de classe C^1.*

La démonstration la plus facile du théorème de Darboux. *Il s'agit de montrer que la dérivée d'une fonction dérivable vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, autrement dit que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable (où I est un intervalle) et que $x < y$ sont deux points de I et λ compris entre $f'(x)$ et $f'(y)$ alors il existe $t \in [x;y]$ tel que $f'(t) = \lambda$. Pour cela, on définit $\varphi\colon]x;y[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(u) = (f(u) - f(x))/(u - x)$ et $\psi\colon]x;y[\to \mathbb{R}$ par $\psi(u) = (f(u) - f(y))/(u - y)$. Montrer que φ et ψ se prolongent par continuité à $[x;y]$, et que λ appartient à $\varphi([x;y])$ ou à $\psi([x;y])$. Conclure.*

Exercice plus subtil qu'il n'y paraît. *Soit f une fonction réelle (définie sur $\mathbb{R}$) dérivable s'annulant en une infinité de points. Montrer qu'il en va de même de sa dérivée.*