Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Huitième semaine (fonctions numériques, structures algébriques)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice assez faisable. *Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(x) = O(x)$ quand $x \to +\infty$.*

Fonctions réglées. *Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dite réglée ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $|\theta(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I$ (autrement dit, f est approchée uniformément sur I par des fonctions en escalier).*

1) *Montrer que toute fonction monotone est réglée.*
2) *Montrer que toute fonction réglée admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite.*
3) *Montrer réciproquement que toute fonction admettant en tout point une limite à gauche et une limite à droite, est réglée.*

Fonctions àvb. *Soit $I = [a; b]$ (avec $a < b$) un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dite àvb (à variations bornées) ss'il existe un V tel que pour toute subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de I on a $\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq V$. Montrer que f est àvb ssi f est somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Montrer par des exemples qu'une fonction àvb peut ne pas être (uniformément) continue et qu'une fonction (uniformément) continue peut ne pas être àvb.*

Exercice difficile décomposé. *Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme ssi G est abélien. On suppose que G est un groupe fini, et que $\varphi\colon G \to G$ est un morphisme involutif dont le seul point fixe est 1 (i.e. $\varphi(\varphi(x)) = x$ pour tout x et $\varphi(x) = x$ équivaut à $x = 1$). Montrer que tout élément de G s'écrit $t\varphi(t)^{-1}$ pour un certain t. En déduire que $\varphi(x) = x^{-1}$ pour tout x, et que G est abélien.*

Exercice basique. *Un anneau commutatif A est dit intègre ssi $0 \neq 1$ et que $xy = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.*

Exercice classique. *Montrer qu'un groupe n'est jamais réunion de deux sous-groupes propres. En déduire que si un anneau A vérifie : pour tous $x, y \in A$ on a $yx = xy$ ou $yx = -xy$ alors A est commutatif.*

Inverses à gauche et à droite. *Soit A un anneau, et $x \in A$. On appelle inverse à gauche de x un élément $y \in A$ tel que $yx = 1$. Montrer que*

1) *Si x admet un unique inverse à gauche, alors x est inversible.*
2) *Si x admet au moins deux inverses à gauche, alors il en admet une infinité.*

Exercice facile. *Un anneau A est appelé anneau de Boole ss'il vérifie $x^2 = x$ pour tout x. Montrer qu'un tel anneau est commutatif.*