Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Septième semaine (fonctions numériques)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice trop facile. *Comparer les fonctions*

$$t^\alpha \textit{ et } e^{(\ln t)^\beta}$$

quand $t \to +\infty$, *avec* $\alpha, \beta > 0$.

Exercice amusant. *Soit* (f_n) *une suite quelconque de fonctions réelles (définies sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, disons). Montrer qu'il existe* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_n(t) = o(f(t))$ *quand* $t \to +\infty$ *pour tout* n.

Exercice médiocrement intéressant. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$. *Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) Toute fonction continue sur A *est bornée.*

(ii) Toute fonction continue sur A *et bornée atteint ses bornes.*

Montrer que de plus dans ces conditions A *est borné (i.e. contenu dans un intervalle de longueur finie) et que son complémentaire est un voisinage de chacun de ses points (une façon ridicule de dire que* A *est fermé, mais on fera avec).*

Contre-exemple habituel. *Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (i.e. si* $f(a) < y < f(b)$ *alors il existe* x *strictement compris entre* a *et* b *tel que* $y = f(x)$*) est-elle nécessairement continue ?*