Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Sixième semaine (suites réelles, fonctions numériques)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Filtres. *On se propose de formuler une définition qui permettra d'unifier toutes les limites vues en cours. On appelle* <u>*filtre*</u> *sur* $\mathbb{R}$ *un ensemble* $\mathfrak{F}$ *de parties de* $\mathbb{R}$ *tel que*

(i) $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ *et* $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ *("*$\mathfrak{F}$ *est non vide mais ne contient pas le vide").*
(ii) Si $U \in \mathfrak{F}$ *et* $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$ *alors* $V \in \mathfrak{F}$ *("*$\mathfrak{F}$ *est stable par agrandissement").*
(iii) Si $U, V \in \mathfrak{F}$ *alors* $U \cap V \in \mathfrak{F}$ *("*$\mathfrak{F}$ *est stable par intersections finies").*

Donner des exemples variés de filtres sur $\mathbb{R}$*. Si* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{G}$ *sont deux filtres sur* $\mathbb{R}$*, on dit que* $\mathfrak{F}$ *est* <u>*plus fin*</u> *que* $\mathfrak{G}$ *ssi* $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{G}$*. Si* $\mathfrak{F}$ *est un filtre sur* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$*, on dit que* $\mathfrak{F}$ <u>*converge*</u> *vers* a *ssi* $\mathfrak{F}$ *est plus fin que le filtre* $\mathfrak{V}_a$ *des voisinages de* a *(i.e. le filtre dont les les éléments sont exactement les voisinages de* a*). Si* $\mathfrak{F}$ *est un filtre sur* $\mathbb{R}$ *et* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application quelconque, on définit l'*<u>*image directe*</u> *de* $\mathfrak{F}$ *par* f*, notée* $f_*\mathfrak{F}$*, de la façon suivante :*

$$f_*\mathfrak{F} = \{U \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(U) \in \mathfrak{F}\}$$

Montrer que $f_*\mathfrak{F}$ *est encore un filtre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $f_*\mathfrak{V}_a$ *converge vers* b *(*a *et* b *étant des points de* $\mathbb{R}$*). Formuler des conditions semblables à l'infini. Généralisations diverses. Utiliser les filtres pour prouver le théorème de composition des limites.*

Fonction de Weierstraß. *On considère la fonction* f *définie par*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ est irrationnel} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } t = p/q \text{ sous forme irréductible} \end{cases}$$

Trouver les points où f *est continue et les points où* f *est discontinue.*

Exercice intéressant. *Si* x *est un nombre réel, on note* $\lfloor x \rfloor$ *sa partie entière et* $\flat x = x - \lfloor x \rfloor$ *sa partie fractionnaire. Montrer que la suite* $(\flat\sqrt{n})$ *n'a pas de limite. Un peu plus difficile : montrer que l'ensemble des valeurs prises par cette suite est dense dans* $[0; 1]$*, ou, ce qui revient au même, que l'ensemble des réels de la forme* $m + \sqrt{n}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Critère de Cauchy sur les fonctions. *Soit* f *une fonction numérique, et* $a \in \mathbb{R}$*. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :*

(i) f *admet une limite en* a*.*
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $|x-a| < \eta$ *et* $|y-a| < \eta$ *alors* $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$*.*