Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Troisième semaine (suites réelles)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Exercice trop facile. *Soit (u_n) une suite prenant toutes les valeurs rationnelles. Montrer que (u_n) n'admet pas de limite.*

Exercice toujours un peu trop facile. *Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $u_n^2 \to \lambda$. Que peut-on dire de (u_n) ?*

Exercice un peu moins trop facile. *Soit (u_n) une suite réelle, telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers des limites notées λ et λ'. Montrer que si $\lambda = \lambda'$ alors (u_n) converge et trouver sa limite, et que si $\lambda \neq \lambda'$ alors (u_n) ne converge pas.*

Exercice beaucoup moins trop facile. *Soit (u_n) une suite réelle, et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection quelconque. On suppose que (u_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il en va de même de $(u_{\varphi(n)})$.*

Exercice pas vraiment trop facile. *Montrer qu'il n'existe pas de suite (u_n) prenant toutes les valeurs réelles.*

Exercice pas du tout du tout trop facile. *Soit (u_n) une suite réelle bornée ; on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose de plus que (w_n) converge. Montrer que (w_n) tend vers 0 et (plus dur) que (v_n) aussi.*