Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Première semaine (Logique, ensembles)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Exercice trivial que pourtant personne n'a encore résolu de manière satisfaisante. *A et B étant deux ensembles, préciser*

1) *Les inclusions entre $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.*
2) *Les inclusions entre $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.*
3) *Les implications entre $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ et $A \subseteq B$.*
4) *Les implications entre $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ et $A \in B$.*

Théorème de Cantor-Bernstein. *Soient X et Y deux ensembles, $f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ deux injections. Montrer qu'il existe une bijection $h: X \to Y$.*

Exercice d'identification. *Étant donnés trois ensembles A, B, B', trouver*

1) *Une bijection entre $A^{B \times B'}$ et $(A^B)^{B'}$.*
2) *Une bijection entre $A^{B \cup B'}$ et $A^B \times A^{B'}$, à condition que B et B' soient disjoints.*

Inverses des applications. *Montrer qu'une application $f: X \to Y$ est surjective ss'il existe $g: Y \to X$ telle que $fg = \mathrm{id}_X$ (on dit que g est une "section" de f). Trouver et prouver une caractérisation similaire des applications injectives (l'existence d'une "rétraction").*

Exercice trop classique. *Étant donnés $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$, montrer que si gf est surjective (respectivement injective) alors g (respectivement f) l'est aussi. Contre-exemples variés...*

Théorème de Cantor et paradoxe de Russell. *Soit A un ensemble quelconque. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $A \to \mathcal{P}(A)$. En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble U dont tous les ensembles soient éléments ($\neg \exists U \forall x (x \in U)$).*

Équivalences. *Pour deux ensembles E, F et $f: E \to F$, prouver l'équivalence entre*

1) *f est surjective.*
2) *Pour tout $y \in F$, on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.*
3) *Pour tout $Y \subseteq F$, on a $f(f^{-1}(Y)) = Y$.*
4) *Le seul $Y \subseteq F$ tel que $f^{-1}(Y) = \varnothing$ est $\varnothing$.*

Trouver un énoncé analogue pour les applications injectives.