Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Trentième et dernière semaine (révisions générales)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Un exercice très intéressant. *On considère une application* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer qu'il existe deux points distincts symétriques par rapport à l'origine ayant la même image par* f*. Montrer le même résultat pour deux points tels qu'on passe de l'un à l'autre par une rotation d'angle* $\pi/4$ *autour de l'origine. Enfin, montrer le même résultat avec un angle* α *quelconque.*

Exercice épatant. *Déterminer la nature de la série de terme général* $\sin[(2+\sqrt{3})^n\pi]$.

Indépendance. *On considère* $\mathbb{R}$ *comme un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel. Montrer que les réels* $\log p$ *(où* p *parcourt les nombres premiers) sont linéairement indépendants. Beaucoup plus difficile : montrer le même résultat pour les* $\sqrt{n}$ *où* n *parcourt les naturels qui ne sont divisibles par aucun carré parfait (*$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10$*, etc.)*

Matrices. *Soient* A *et* B *deux matrices réelles* $n \times n$*. On suppose que* $A^2 + B^2 = AB$ *et que* $AB - BA$ *est inversible. Montrer que* $3|n$.