Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Vingt-neuvième semaine (arithmétique, intégrales doubles)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Un grand classique. *On considère, pour $n \geq 2$, la quantité*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que S_n n'est pas un entier.

Solution : Supposons par l'absurde que S soit un entier. Appelons 2^r la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n, et q le produit de tous les naturels impairs compris entre 1 et n inclus. Puisque S est entier ainsi que 2^{r-1} et q, le nombre $2^{r-1}qS$ est un entier. Or il est égal à la somme des $\frac{2^{r-1}q}{k}$ pour k allant de 1 à n. Ces quantités sont toutes des entiers (puisque k divise $2^{r-1}q$) sauf $\frac{2^{r-1}q}{2^r} = \frac{q}{2}$, qui pour sa part n'est pas un entier. Par conséquent, $2^{r-1}qS$, étant somme d'un certain nombre d'entiers et d'un nombre qui n'est pas entier, n'est certainement pas un entier.

Théorème à la Waring-Wolstenholme. *Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que le numérateur réduit de*

$$T = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

est divisible par p.

Solution : Notons D le plus petit commun multiple de $1, 4, 9, \ldots, (p-1)^2$, et soit $N = DT$. L'entier D n'est pas divisible par p puisque les nombres $1, 4, 9, \ldots, (p-1)^2$ ne le sont pas. Dans l'écriture $T = N/D$, il ne peut donc pas y avoir de simplification d'un facteur p entre le numérateur et le dénominateur, et tout devient donc à montrer que N est multiple de p, autrement dit que la somme

$$D + \frac{D}{4} + \cdots + \frac{D}{(p-1)^2}$$

(dont tous les termes sont entiers) est nulle modulo p. En notant par un exposant -1 l'inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il s'agit de montrer que $D(1 + 4^{-1} + 9^{-1} + \cdots + (p-1)^{-2})$ est nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et comme D est inversible modulo p, il suffit encore de montrer que $1 + 2^{-2} + 3^{-2} + \cdots + (p-1)^{-2}$ est nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Mais l'opération de prendre l'inverse modulo p se contente de permuter les classes de congruence modulo p, donc la somme ci-dessus est égale (modulo p) à $1 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2$. Tout revient donc à montrer que l'entier

$$1 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}$$

est multiple de p. Mais c'est évident.

Théorème de Lagrange. *Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : tout entier naturel peut s'écrire comme somme de quatre carrés d'entiers naturels. Pour cela, on commencera par vérifier l'identité suivante :*

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2+t^2)(x'^2+y'^2+z'^2+t'^2)\\ =&(xx'+yy'+zz'+tt')^2+(xy'-yx'-zt'+tz')^2\\ +&(xz'+yt'-zx'-ty')^2+(xt'-yz'+zy'-tx')^2\end{aligned}$$

On expliquera alors pourquoi il suffit de montrer le résultat pour les nombres premiers (impairs). Soit donc p un nombre premier impair. En considérant les résidus modulo p de $0^2, 1^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$, et $-1-0^2, -1-1^2, \ldots, -1-(\frac{p-1}{2})^2$, montrer qu'il existe x, y, z, t entiers tels que $x^2+y^2+z^2+t^2 = lp$ pour un certain entier $0 < l < p$. On considère le plus petit tel entier l. Montrer que l est impair (car si l marche alors $l/2$ marche aussi). On suppose par l'absurde $l > 1$. En appelant x', y', z', t' les résidus de x, y, z, t modulo l compris entre $-\frac{l-1}{2}$ et $\frac{l-1}{2}$, et en réappliquant l'identité, arriver à une contradiction.

Solution : L'identité indiquée s'obtient en développant brutalement (elle peut encore s'obtenir en écrivant la norme de $q\bar{q}'$ où q et q' sont deux quaternions). Elle montre que le produit de deux quantités qui sont sommes de quatre carrés est lui-même somme de quatre carrés. Par conséquent, il suffit de montrer le résultat pour 2 (ce qui est trivial) et pour les nombres premiers impairs. Soit donc p un nombre premier impair. Les $\frac{p+1}{2}$ classes de résidus modulo p de $0^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ sont deux à deux distinctes (puisque dans un corps on ne peut avoir $a^2 = b^2$ que si $a = b$ ou $a = -b$, et ici la deuxième possibilité ne peut pas se produire). Il en va donc de même des classes de $-1-0^2, -1-1^2, \ldots, -1-(\frac{p-1}{2})^2$. On a donc ici deux fois $\frac{p+1}{2}$ classes de résidus dans un ensemble qui en contient p, et il y a donc forcément une égalité entre elles, disons $x^2 \equiv -1-y^2 \pmod p$, ce qui donne encore $x^2+y^2+z^2+t^2$ (avec $z=1$ et $t=0$), donc $x^2+y^2+z^2+t^2 = lp$ pour un certain entier $0 < l < p$. Considérons maintenant le plus petit entier $0 < l < p$ tel que pour certains x, y, z, t entiers on ait $x^2+y^2+z^2+t^2 = lp$.

L'entier l ne peut être pair, sans quoi les nombres x^2, y^2, z^2 et t^2, donc aussi les nombres x, y, z et t, seraient deux à deux de même parité ; en supposant que x et y, ainsi que z et t soient de même parité, on aurait alors

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{z+t}{2}\right)^2+\left(\frac{z-t}{2}\right)^2 = \frac{l}{2}p$$

ce qui contredit la minimalité de l.

Supposons maintenant par l'absurde que $l > 1$. Appelons x', y', z', t' les représentants respectifs des classes de congruence modulo l de x, y, z, t compris entre $-\frac{l-1}{2}$ et $\frac{l-1}{2}$ (inclus). Alors $x'^2+y'^2+z'^2+t'^2$ est congru à $x^2+y^2+z^2+t^2$, donc à lp, donc à 0, modulo l, et par conséquent il s'écrit kl avec $0 < k < l$ (cette dernière égalité provient de ce que $-\frac{l}{2} < x', y', z', t' < \frac{l}{2}$). En appliquant l'identité du début, on voit alors que kl^2p est somme de quatre carrés, dont on vérifie facilement qu'ils sont tous multiples de l^2 ; en simplifiant par l^2, il en résulte que kp est somme de quatre carrés, ce qui contredit encore la minimalité de l.

Exercice mystérieux. *On considère un grand rectangle partitionné en petits rectangles dont les axes sont parallèles à ceux du grand rectangle. On suppose de plus que chaque petit rectangle a au moins un côté entier. Montrer qu'il en va de même du grand rectangle.*

Solution : On considère l'intégrale double de $e^{i(x+y)}$ par rapport à x et y sur un rectangle de côtés a et b : celle-ci vaut

$$\int_u^{u+a} \int_v^{v+b} e^{i(x+y)}\, dy\, dx = (1 - e^{ia})(1 - e^{ib})e^{i(u+v)}$$

et en particulier elle est nulle si et seulement si le rectangle a un côté entier. Ainsi, cette intégrale est nulle sur chaque petit rectangle, donc elle l'est aussi sur le grand rectangle, qui a donc un côté entier.